

УДК 517.958: 530.145

© Васильчикова Е.Н., Говоров А.Д., Догадина С.Н., 2012

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ, СОЗДАВАЕМЫХ ЭТИМИ ВОЛНАМИ, ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД ПРИ УСЛОВИИ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ

**Аннотация.** В работе используется графический метод сложения плоских электромагнитных волн (автор метода А. А. Эйхенвальд), распространяющихся под углом друг к другу. Представлен анализ поведения энергетических потоков электромагнитных волн вблизи границы раздела двух сред в случае полного внутреннего отражения, а также используется графический анализ траекторий векторов магнитной индукции и потоков энергии в обеих средах. Приведенный метод может быть использован в других задачах, в которых рассматриваются наложение и взаимодействие большого числа волн, например, в явлениях дифракции и интерференции, распространения волн в волноводах и др.

**Ключевые слова:** плоская электромагнитная волна, предельный угол, поток энергии.

© E. Vasilchikova, A. Govorov, S. Dogadina, 2012

## RESEARCH OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVES AND ENERGY FLOWS GENERATED BY THESE WAVES, NEARBY THE MEDIUMS BOUNDARY SECTION UNDER THE CONDITION OF TOTAL INTERNAL REFLECTION

**Abstract.** The article describes the graphical method of plane electromagnetic waves' addition, proposed by A.A. Eichenwald. The author presents the analysis of the behavior of electromagnetic waves energy flows nearby the boundary under the condition of total internal reflection. The article also deals with the graphical analysis of the trajectories of the magnetic induction and energy fluxes in both mediums. The method described can be used in other tasks, which regard superposition and interaction of a large number of waves, such as diffraction and interference phenomena, wave propagation in waveguides and so on.

**Key words:** plane electromagnetic wave, the critical angle, energy flux

### 1. РАСЧЕТ СРЕДНИХ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ В СРЕДАХ ПРИ ПОЛНОМ ВНУТРЕННЕМ ОТРАЖЕНИИ

Пусть волна, поляризованная в плоскости, параллельной границе раздела, падает из среды с показателем преломления  $n_1$  на границу со второй средой, показатель преломления которой равен  $n_2$  (рис.1).

$\vec{k}^0, \vec{k}_1, \vec{k}_2$  — волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн;  $\vec{B}^{(0)}, \vec{B}^{(1)}, \vec{B}^{(2)}$  — векторы индукции магнитного поля;  $n_1$  — показатель преломления первой среды;

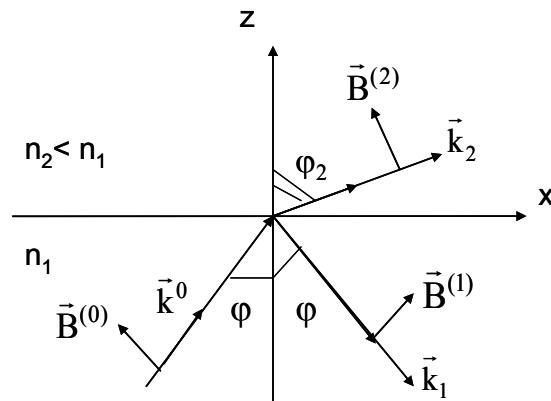


Рис 1. Падение, отражение и преломление волны на границе раздела двух сред.

$n_2$  — показатель преломления второй среды;  $\varphi$  — угол падения и отражения;  $\varphi_2$  — угол преломления; векторы напряженности электрического поля  $\vec{E}^{(0)}, \vec{E}^{(1)}, \vec{E}^{(2)}$  перпендикулярны плоскости чертежа.

Граничные условия, выражающие непрерывность тангенциальных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  на границе, позволяют рассчитать соотношение между амплитудами падающей, отраженной и преломленных волн (формулы Френеля) [1]:

$$\frac{E^{(1)}}{E^{(0)}} = -\frac{\sin(\varphi - \varphi_2)}{\sin(\varphi + \varphi_2)}, \quad \frac{E^{(2)}}{E^{(0)}} = \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_2)}.$$

Рассматривается случай, когда угол падения  $\varphi > \varphi_{\text{пред}}$ , где:  $\varphi_{\text{пред}} = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$ . Тогда проекция волнового вектора  $\vec{k}^{(2)}$  на ось  $z$  будет мнимой. Это свидетельствует о неоднородности волны во второй среде.

Рассчитаем среднее значение потоков энергии в обеих средах по формуле [2; 3]:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \operatorname{Re}[\vec{E}, \vec{B}^*]$$

В 1-й среде происходит наложение падающей и отраженной волны: они накладываются друг на друга. Считаются суммарные потоки вдоль осей  $x$  и  $z$  в случае полного отражения. Рассматривая данный случай, следует учитывать сдвиг фазы отраженной волны.

$$\langle S_x^z \rangle = 4I_0 \sin \varphi \cos^2 \left( k_z^0 z + \frac{\delta_{\perp}}{2} \right), \quad (1)$$

где  $I_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{v_1}$  — интенсивность падающей волны,  $\delta_{\perp}$  — сдвиг фазы отраженной

$$\text{волны: } \operatorname{tg}\left(\frac{\delta_{\perp}}{2}\right) = \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2}}{n_1 \cos \varphi}.$$

Считается, что среднее значение проекции на ось  $z$  суммарного потока энергии равно 0:

$$\langle S_z^{\Sigma} \rangle = 0 \quad (2)$$

Также вектор  $\vec{S}$  направлен вдоль границы раздела, он изменяется периодически с координатой  $z$ .

Во 2-й среде в случае полного отражения:

$$\langle S_x^{(2)} \rangle = 4A_0^2 \cdot I_0 e^{\frac{2z}{l}} \cdot \sin \varphi, \quad (3)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{n_1 \cos \varphi}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}, \quad l = \frac{c}{\omega \sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2}}.$$

$$\langle S_z^{(2)} \rangle = 0 \quad (4)$$

Вектор  $\vec{S}$  также направлен вдоль границы раздела двух сред, а его модуль экспоненциально убывает с увеличением  $z$ , т. е. имеет место неоднородная волна.

Предполагается, что  $z=0$ , отсюда следует:

$$\langle S_x^{\Sigma} \rangle \Big|_{z=0} = 4I_0 \sin \varphi \cos^2\left(\frac{\delta_{\perp}}{2}\right), \quad \langle S_x^{(2)} \rangle \Big|_{z=0} = 4A^2 I_0 \sin \varphi, \quad A_0^2 = \cos^2\left(\frac{\delta_{\perp}}{2}\right),$$

Следовательно:

$$\langle S_x^{\Sigma} \rangle \Big|_{z=0} = \langle S_x^{(2)} \rangle \Big|_{z=0} \quad (4)$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что вдоль границы раздела имеется постоянный поток энергии в одном направлении (вдоль  $x$ ). Вдоль оси

$z$  образуется стоячая волна, в которой  $S_z$  меняет знак, т. е. энергия не переносится ( $\langle S_z^{(2)} \rangle = 0$  в обеих средах).

## 2. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси  $u$ , она имеет вид [1]:

$$B = B_u \cos \omega \left( t - \frac{u}{c} \right), \quad (5)$$

где  $B$  — индукция магнитного поля,  $B_u$  — амплитуда волны,  $\omega$  — частота,  $c$  — скорость волны,  $u$  — координата, нормальная к волновому фронту,  $t$  — время.

Пользуясь методом А. А. Эйхенвальда [2], волну можно представить в виде системы параллельных прямых, направление которых совпадает с направлением колебаний вектора  $\vec{A}$ . Вектор  $\vec{A}$  направлен перпендикулярно плоскости чертежа. Считается, что плотность таких линий пропорциональна величине  $B$ , отсюда следует, что расстояние между соседними прямыми  $\Delta u$  должно быть обратно пропорционально  $B$ .

В момент времени  $t = 0$  можно записать выражение (5) в виде:

$$B_u \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} u = \frac{\Delta a}{\Delta u}, \quad (6)$$

где  $\Delta a$  — постоянная, зависящая от выбранного масштаба.

Формула (6) может быть преобразована следующим образом:

$$B_u \left( \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} u \right) \Delta u = \frac{\lambda_u}{2\pi} \Delta \left[ B_u \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_u} u \right) \right] = \Delta a \quad (7)$$

Приращение величины, стоящей в квадратных скобках, согласно формуле (6) будет

равно постоянной величине  $\frac{2\pi}{\lambda_u} \cdot \Delta a$ , сама эта величина должна быть равна этой постоянной, умноженной на целое число  $n$ :

$$B_u \sin \frac{2\pi u}{\lambda_u} = \frac{2\pi}{\lambda_u} \Delta a \cdot n \quad (8)$$

Для того чтобы произвести расчет соответствующих значений  $u$ , следует для параметра  $n$  подставлять ряд целых чисел от  $n = 0$  для  $u = 0$  до  $n = n_0$  для  $u = \frac{\lambda_u}{4}$ , где

$n_0 = \frac{B_u \lambda_u}{2\pi \Delta a}$  — число, которое может принимать любые значения, так как зависит только от масштабного параметра  $\Delta a$ .

Предполагается, что  $n_0 = 12$ , тогда согласно выражению (8) можно получить:

$$u = \frac{\lambda_u}{2\pi} \arcsin\left(\frac{n}{12}\right)$$

(9)

Подставляя в формулу (9) значения  $n=0,1, \dots, 12$ , можно получить соответствующее значение  $u$ : координаты точек пересечения прямых, параллельных оси  $v$  с осью  $u$ .

Стрелочки, изображенные на рис. 2, обозначают направление колебаний вектора  $\vec{B}$ . Для того чтобы изобразить волну с другой амплитудой, надо изменить  $n_0 \sim B_u$ .

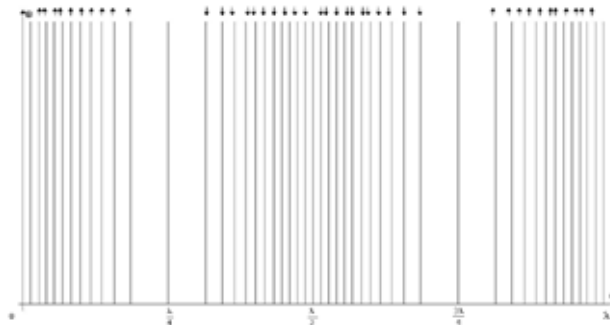


Рис. 2. Схематическое изображение плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $u$ .

Пусть волна падает на границу раздела двух сред вдоль оси  $u$ , а отражается вдоль оси  $v$ . Чтобы представить результирующее поле, необходимо наложить друг на друга два чертежа, подобных рис.2.

Чтобы получить изображения траекторий индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , необходимо построить диагонали соответствующих четырехугольников (по правилу сложения векторов, то есть согласно правилу параллелограмма).

Уравнения для падающей и отраженной волн можно записать в виде:

$$B_1 = B_u \cos(\omega t - k_u u)$$

$$B_2 = B_v \cos(\omega t - k_v v)$$

где  $B_u$  и  $B_v$  — амплитуды падающей и отраженной волн, соответственно.

В зависимости от соотношения между амплитудами падающей и отраженной волн и угла  $2\varphi$  возможны различные случаи, представленные на рис. 3, 4, 5.

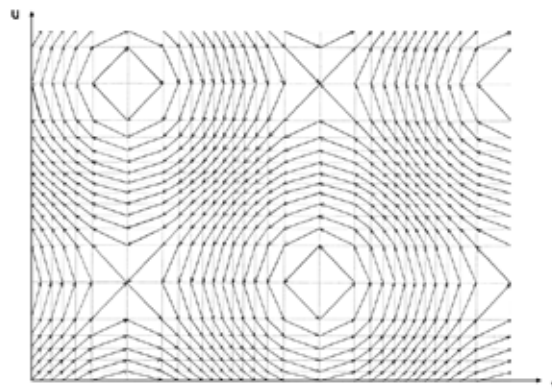


Рис. 3. Поле двух плоских волн равной амплитуды, распространяющихся под углом  $2\varphi = 90^\circ$ .

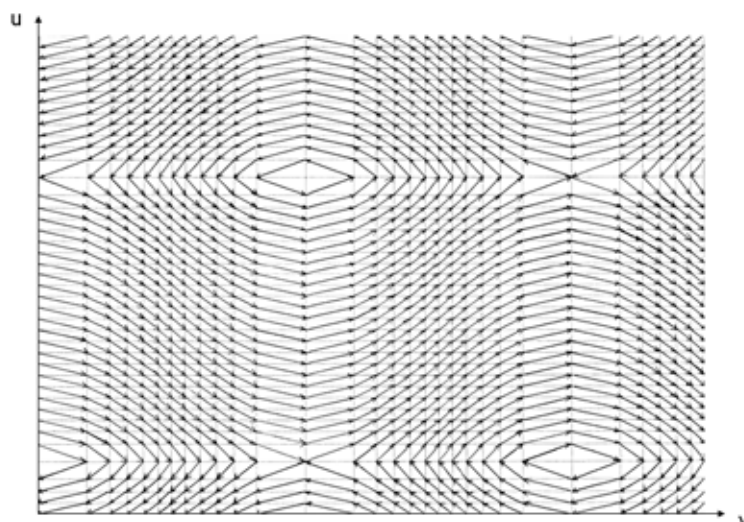


Рис 4. Поле двух плоских волн, амплитуды которых  $B_v = \frac{1}{2} B_u$ ,  $2\varphi = 90^\circ$ .

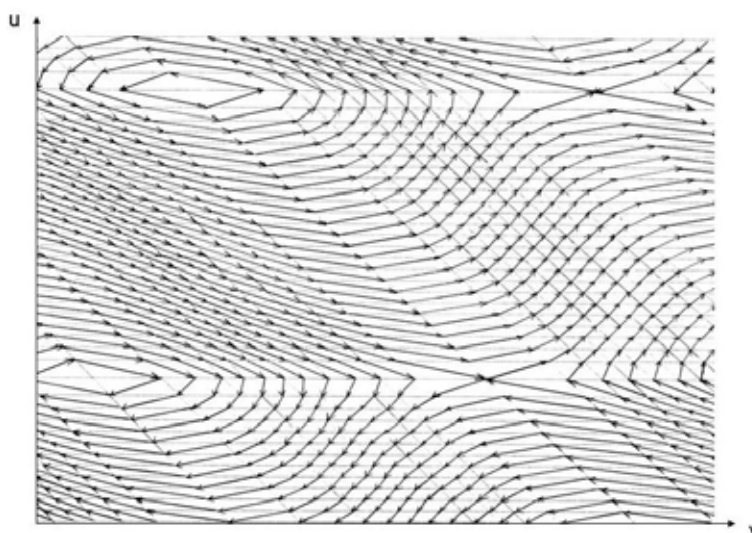


Рис 5. Поле двух плоских волн с амплитудами  $B_v = \frac{1}{2} B_u$ ,  $2\varphi = 45^\circ$ .

Следует отметить, что приведенные выше картины полей соответствуют фиксированному моменту времени ( $t = 0$ ). С течением времени они смещаются вдоль оси  $x$  со

скоростью  $\frac{\dot{\mathbf{n}}}{\sin \varphi}$ .

Данный графический способ представления электромагнитного поля волн, распространяющихся под углом друг к другу, универсален, следовательно, может быть использован и в других задачах, в которых рассматриваются наложение и взаимодействие большого числа волн. Например, при изучении явлений дифракции и интерференции волн, поля волн в волноводах и др.

### 3. АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД В СЛУЧАЕ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ

Траектории векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  рассматривают согласно методу Эйхенвальда А. А. [4].

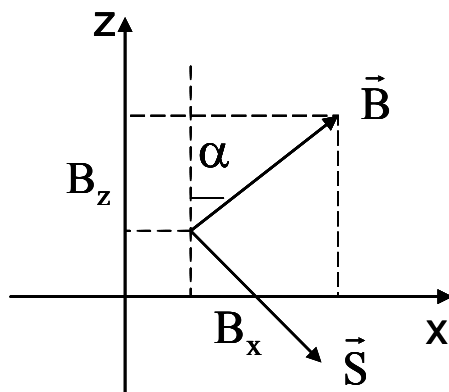


Рис. 6. К выводу уравнений траекторий  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$ .

Если вектор индукции магнитного поля  $\vec{A}$  составляет угол  $\alpha$  с осью Z (рис. 6), то можно записать:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_x}{B_z} = \frac{dx}{dz} \quad (10)$$

где  $B_z$  и  $B_x$  - проекции вектора  $\vec{B}$  на оси z и x.

Фиксируется начальный момент времени  $t = 0$ .

Для первой среды в начальный момент времени  $t=0$  выражение (10) имеет вид:

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \left( k_x^0 x - \frac{\delta_{\perp}}{2} \right) \operatorname{tg} \left( k_z^0 z + \frac{\delta_{\perp}}{2} \right) \quad (11)$$

где  $k_x^0 = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda}$ ,  $k_z^0 = \frac{2\pi}{\lambda_z} = \frac{2\pi \cos \varphi}{\lambda}$ ,  $\varphi = 45^\circ$ .

После интегрирования (11) получается следующее соотношение:

$$\sin \left( k_x^0 x - \frac{\delta_{\perp}}{2} \right) \cos \left( k_x^0 x + \frac{\delta_{\perp}}{2} \right) = \cos \left( k_z^0 z_1 + \frac{\delta_{\perp}}{2} \right) \sin \left( k_x^0 x_1 - \frac{\delta_{\perp}}{2} \right),$$

где  $x_1, z_1$  — произвольные постоянные.

Далее выбирается новая система координат (X, Z):

$$k_x^0 x - \frac{\delta_{\perp}}{2} = kX, \quad k_z^0 z - \frac{\delta_{\perp}}{2} = kZ$$

В этой системе координат уравнение траекторий  $\vec{B}$  в 1-й среде при  $t = 0$  имеет вид:

$$\sin(kX) \cdot \cos(kZ) = K, \quad (12)$$

где  $K$  — произвольная константа (параметр семейства).

Пунктирными линиями на рис. 7 изображены траектории  $\vec{B}$  для следующих значений параметра  $K = \pm 0.1, \pm 0.5, \pm 0.8, K \rightarrow 0$ . Построение выполнено с помощью графической программы Advanced Grapher.

Уравнение траекторий потоков энергии в 1-й среде можно получить, интегрируя

выражение  $\frac{dX}{dZ} = -\frac{1}{\text{ctg}\varphi \cdot \text{tg}(k_x^0 X) \cdot \text{tg}(k_z^0 Z)}$ . Здесь учтено, что  $\vec{S} \perp \vec{B}$ .

$$\sin(kZ) = \left( \frac{\sin kZ_1}{\cos kX_1} \right) \cdot \cos(kX), \quad (8)$$

где  $\frac{\sin kZ_1}{\cos kX_1} = M$  — параметр семейства.

На рис. 7 траектории потоков энергии изображены сплошными линиями ( $M = 0, \pm 0.5, \pm 0.8, \pm 1, M \rightarrow \infty$ ).

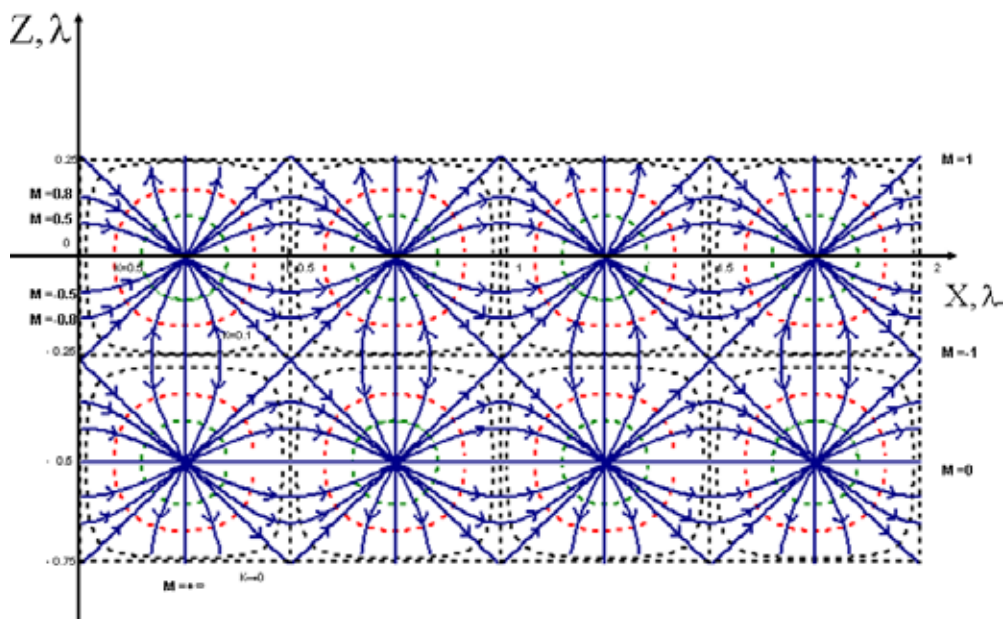


Рис. 7. Траектории  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  в первой среде.

На рис. 7 траектории потоков энергии ортогональны к траекториям вектора индукции магнитного поля.

Аналогично получаются уравнения траекторий  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  во второй среде в случае полного внутреннего отражения.



Уравнение траекторий  $\vec{B}$  во второй среде:

$$z = \frac{1}{A} \frac{\lambda}{2\pi} h \left( \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} x}{\sin \frac{2\pi}{\lambda} x_1} \right), \quad (12)$$

где  $\sin \frac{2\pi}{\lambda} x_1 = L$  - параметр семейства.

Здесь  $A = \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \varphi - n_2^2}}{n_1 \sin \varphi}$ . Для расчета принимаем:  $\varphi = 45^\circ$ ,  $n_1=1,5$ ,  $n_2=1$ ,  $A = 0,33$ .

На рис. 8 траектории  $\vec{B}$  изображены пунктиром ( $L = \pm 0.105, \pm 0.53, \pm 0.84, L \rightarrow 0$ ).

Уравнение траекторий  $\vec{S}$  во второй среде:

$$z = A \frac{\lambda}{2\pi} h \left( \frac{\cos \frac{2\pi}{\lambda} x}{\cos \frac{2\pi}{\lambda} x_1} \right), \quad (13)$$

где  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x_1 = G$  - параметр семейства.

На рис. 8 траектории  $\vec{S}$  изображены сплошной линией ( $G = 0.156, 0.306, 0.618$ ).

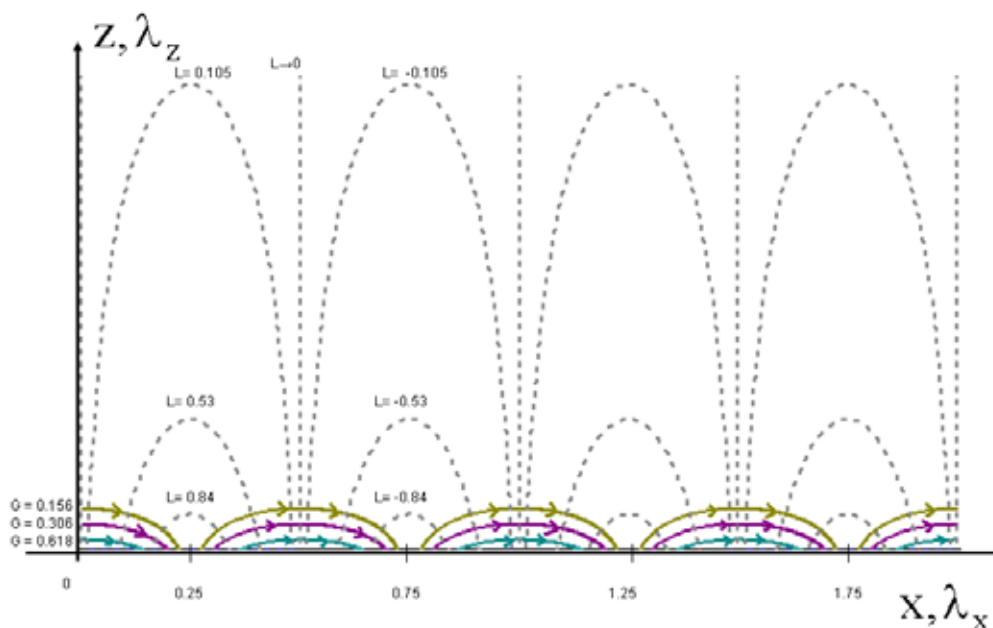


Рис. 8. Траектории  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  во второй среде при полном внутреннем отражении.

Траектории  $\vec{S}$  (и  $\vec{B}$ ) в обеих средах «сшиваются» на границе с учетом сдвига фаз в падающей и отраженных волнах.

$$z = \frac{\lambda_z}{2\pi} \cdot \frac{\delta_{\perp}}{2} = 0,05\lambda \quad (14)$$

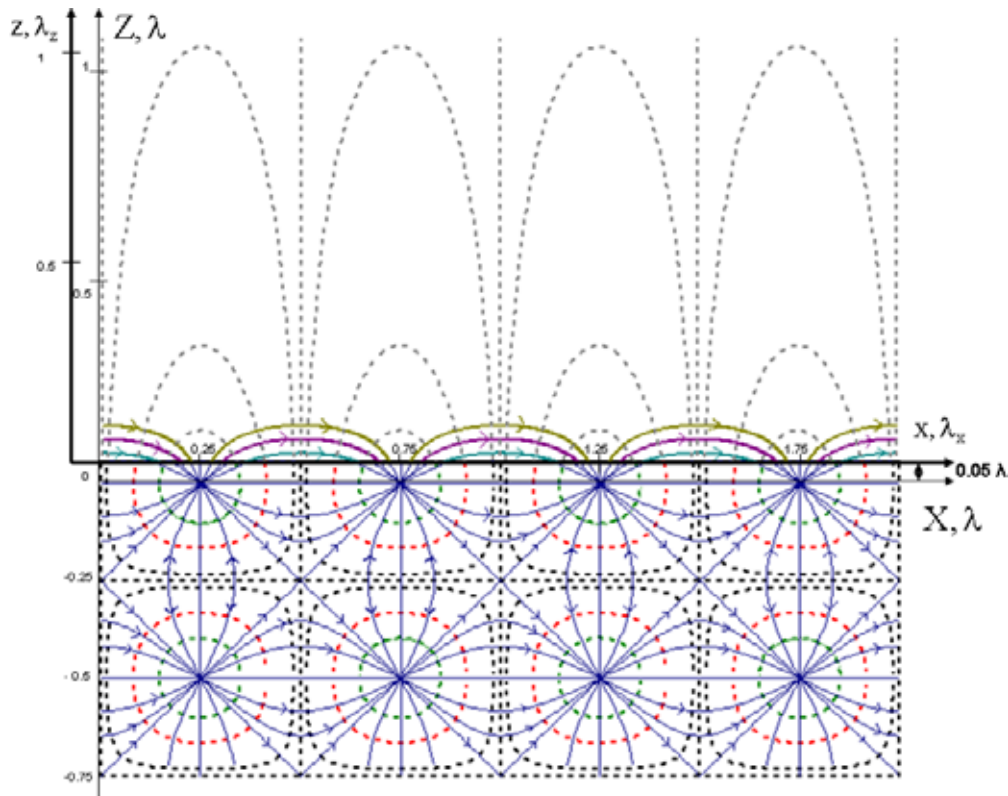


Рис. 9. Траектории  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  в обеих средах при полном внутреннем отражении.

Анализируя полученные выше результаты, можно сделать следующие выводы.

1. Поток энергии меняет свое направление вдоль одной линии (показано стрелками).

2. Картина, представленная на чертеже, соответствует моменту времени  $t = 0$ . С

течением времени она смещается вдоль оси  $x$  со скоростью  $\frac{v}{\sin \varphi}$ .

3. Энергия входит во 2-ю среду и при полном внутреннем отражении; это происходит в различных местах плоскости раздела в различные времена. Когда энергия входит во 2-ю среду, то она распространяется в ней не прямолинейно (как при обычном преломлении), а описывает кривую линию, возвращаясь, таким образом, в 1-ю среду.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Бутиков Е. И. Оптика. — М.: Высш. шк., 1986.
2. Матвеев А. Н. Оптика. — М.: Высш. шк., 1985.
3. Федун Д. Д. Исследование отражения света на границе раздела. Полное внутреннее отражение. Материалы научно-методической конференции МГОУ, 2010.
4. Эйхенвальд А. А. Избранные работы. — М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956.