

УДК 530.145

**Латышев А.В., Юшканов А.А.***(г. Москва)*

## ПОПЕРЕЧНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ КВАНТОВОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ВЫРОЖДЕНИЯ И ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ

*Аннотация.* Выведены формулы для поперечной электрической проводимости и диэлектрической проницаемости квантовой столкновительной плазмы с произвольной степенью вырождения и постоянной частотой столкновений частиц плазмы. Используется кинетическое уравнение Шредингера–Больцмана с интегралом столкновений в пространстве импульсов с интегралом столкновений релаксационного типа. Показано, что при выведенная формула переходит в формулу для классической плазмы. Показано также, что волновое число стремится к нулю, формула для проницаемости переходит в соответствующую формулу для классической плазмы. Проводится графический анализ модуля электрической проводимости, а также ее действительной и мнимой частей в зависимости от частоты колебаний электромагнитного поля, величины волнового вектора при различных значениях частоты столкновений частиц плазмы и величины химического потенциала электронного газа.

*Ключевые слова:* электрическая проводимость, диэлектрическая проницаемость, квантовая столкновительная плазма, химический потенциал, частота столкновений.

**A. Latyshev, A. Yushkanov***(Moscow)*

## TRANSVERSAL ELECTRIC CONDUCTIVITY AND DIELECTRIC CONDUCTIVITY OF QUANTUM COLLISIONAL PLASMA WITH FREE EXTENT OF DEGENERATION AND CONSTANT COLLISION RATE

*Abstract.* The article presents the formula of transversal electric conductivity and dielectric conductivity of quantum collisional plasma with free extent of degeneration and constant collision rate. The Shrodinger-Boltzmann kinetic equation is used which has the momentum integral of collisions in space with the relaxation-type collision integral. It is shown that having the formula deduced transfers into the formula for classical plasma. The article also show that the wave number vanishes; and the formula of penetrability transfers into the formula for classical plasma. The authors present the graphic analysis of the electric conduction modulus, as well as of its real and imaginary parts, depending on the electromagnetic field oscillation frequency, the size of wave vector at different plasma particles collision rates and the size of electron gaschemical potential.

*Key words:* electric conduction, dielectric conductivity, quantum collisional plasma, chemical potential, collision rate.

**Введение** Исследования по диэлектрической проницаемости квантовой плазмы были начаты Ю. Климонтовичем и В. Силиным [9]. Они изучали квантовую бесстолкновительную плазму с использованием кинетического уравнения Власова–Вигнера относительно квантовой функции распределения (функции распределения Вигнера).

Затем в работе Й. Линдхарда [13] были получены выражения для продольной и поперечной электрической проводимости и диэлектрической проницаемости квантовой бесстолкновительной плазмы. Он использовал уравнение Шредингера относительно матрицы плотности. В этой работе Линдхард сделал попытку обобщить полученные результаты на случай столкновительной плазмы путем замены частоты колебаний электромагнитного поля  $\omega$  на сумму  $\omega + i\nu$ , где  $\nu = 1/\tau$  – частота столкновений частиц плазмы,  $\tau$  – характерное время между двумя последовательными столкновениями частиц плазмы. Свойства электрической проводимости и диэлектрической проницаемости по формулам, выведенным Линдхардом [13], подробно изучались в монографии [8].

К.Л. Кливер и Р. Фукс показали [10], что прямое обобщение формул Линдхарда на случай столкновительной плазмы (путем замены  $\omega \rightarrow \omega + i/\tau$ ) некорректно. Однако, и предложенное ими обобщение формул Линдхарда также оказалось некорректным.

Этот недостаток для продольной диэлектрической проницаемости был преодолен в хорошо известной работе Н.Д.

Мермина [17], в которой он фактически анонсировал формулу для продольной диэлектрической функции. Подробный вывод этой формулы с помощью уравнения Шредингера–Больцмана был дан в нашей работе [11].

Корректное выражение для поперечной диэлектрической проницаемости для случая квантовой столкновительной плазмы было выведено в последние годы [2;12].

В наших работах [1;3] были впервые получены выражения для продольной и поперечной диэлектрической проницаемости квантовой столкновительной плазмы с помощью уравнения Власова–Вигнера–Больцмана и проведено их исследование.

В настоящее время растет интерес к изучению различных свойств квантовой плазмы (см, например, [5;6;7;15;19]).

В настоящей работе формулы для поперечной электрической проводимости и диэлектрической проницаемости из [2] приводятся к расчетному виду. Выполнен графический анализ действительной и мнимой частей поперечной диэлектрической функции и дано ее сравнение с классической плазмой.

**Поперечная электрическая проводимость и диэлектрическая проницаемость.** Пусть векторный потенциал электромагнитного поля является гармоническим, т. е. изменяется как  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ .

Равновесная матрица плотности имеет следующий вид

$$\tilde{\rho} = [\exp(H/(k_B T) - \alpha) + 1]^{-1}.$$

Здесь  $T$  – температура плазмы,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $\mu$  – химический потенциал плазмы,  $H$  – гамильтониан,  $\alpha = \mu/k_B T$  – приведенный (безразмерный) химический потенциал плазмы,  $-\infty < \mu < +\infty$ .

В линейном приближении гамильтониан имеет следующий вид

$$H = \frac{(\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(\mathbf{p}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{p}).$$

Здесь  $\mathbf{p}$  – оператор импульса,  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ ,  $e, m$  – заряд и масса электрона,  $c$  – скорость света.

Возьмем уравнение Шредингера–Больцмана для матрицы плотности с интегралом столкновений в  $\tau$  – приближении

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H, \rho] + i\hbar\frac{\tilde{\rho} - \rho}{\tau}.$$

Здесь  $\nu = 1/\tau$  – эффективная частота столкновений частиц плазмы,  $\tau$  – характерное время между двумя последовательными столкновениями,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $[H, \rho]$  – коммутатор,  $\tilde{\rho}$  – равновесная матрица плотности.

Обозначим далее

$$\Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\hbar\nu}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]}$$

и

$$\mathbf{k}_{\perp}^2 = \mathbf{k}^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q}\right)^2.$$

В работе [2] выведено следующее выражение инвариантного вида для поперечной электрической проводимости

$$\sigma_{tr} = \frac{ie^2N}{m\omega} + \frac{ie^2\hbar^2}{8\pi^3m^2\omega} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q})[f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}]\mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k}.$$

или, выделяя статическую проводимость  $\sigma_0 = e^2N/m\nu$ ,

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3mN} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q})[f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}]\mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} \right]. \quad (1)$$

Здесь

$$f_{\mathbf{k}} = (1 + e^{(E_{\mathbf{k}} - \mu)/k_B T})^{-1}.$$

На основании (1) напишем выражение для диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 m N} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) [f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}] \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} \right]. \quad (2)$$

Заметим, что для невырожденной плазмы числовая плотность в равновесном состоянии равна

$$N = \frac{f_2(\alpha)}{\pi^2} k_T^3,$$

где  $k_T$  – тепловое волновое число,  $k_T = \frac{mv_T}{\hbar}$ ,  $v_T = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ ,  
 $\beta = \frac{m}{2k_B T}$ ,

$$f_2(\alpha) = \int_0^{\infty} x^2 f_F(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + e^{x^2 - \alpha}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{\alpha - x^2}) dx.$$

Преобразуем формулы (1) и (2). Вместо вектора  $\mathbf{k}$  введем безразмерный вектор  $\mathbf{P}$  равенством  $\mathbf{P} = \mathbf{k}/k_T$ . Возьмем вектор  $\mathbf{q} = q(1, 0, 0)$ . Тогда

$$\mathbf{k}_{\perp}^2 = \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 = k^2 - k_x^2 = k_T^2 (P^2 - P_x^2) = k_T^2 P_{\perp}^2.$$

Таким образом, формулы (1) и (2) запишутся в виде:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 + \frac{mv_T^2}{8\pi f_2(\alpha)} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) [f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}] P_{\perp}^2 d^3 P \right] \quad (3)$$

и

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{mv_T^2}{8\pi f_2(\alpha)} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) [f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}] P_{\perp}^2 d^3 P \right]. \quad (4)$$

Воспользуемся разложением на элементарные дроби

$$\Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} + \frac{\omega}{\omega + i\nu} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)}.$$

С помощью этого разложения перепишем формулы (3) и (4):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 + \frac{mv_T^2}{8\pi f_2(\alpha)} \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} P_{\perp}^2 d^3 P + \right. \\ \left. + \frac{mv_T^2}{8\pi f_2(\alpha)} \frac{\omega}{\omega + i\nu} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} P_{\perp}^2 d^3 P \right] \quad (5) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{mv_T^2}{8\pi f_2(\alpha)} \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} P_{\perp}^2 d^3 P + \right. \\ \left. + \frac{mv_T^2}{8\pi f_2(\alpha)} \frac{\omega}{\omega + i\nu} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} P_{\perp}^2 d^3 P \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы

$$J_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} P_{\perp}^2 d^3 P$$

и

$$J_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} P_{\perp}^2 d^3 P.$$

С помощью этих интегралов формулы (5) и (6) перепишутся в симметричной форме:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 + \frac{mv_T^2}{4f_2(\alpha)} \cdot \frac{\omega J_{\omega} + i\nu J_{\nu}}{\omega + i\nu} \right] \quad (7)$$

и

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{mv_T^2}{4f_2(\alpha)} \cdot \frac{\omega J_{\omega} + i\nu J_{\nu}}{\omega + i\nu} \right]. \quad (8)$$

Представим  $J_\nu$  в виде разности двух интегралов. Во втором интеграле сделаем очевидную замену переменной интегрирования. В результате получаем:

$$J_\nu = \frac{1}{2\pi} \int \frac{2E_{\mathbf{k}} - (E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})} f_{\mathbf{k}} P_{\perp}^2 d^3 P.$$

Аналогично преобразуем второй интеграл

$$J_\omega = \frac{1}{2\pi} \int \frac{[2E_{\mathbf{k}} - (E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})] f_{\mathbf{k}} P_{\perp}^2 d^3 P}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu))(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar(\omega + i\nu))}.$$

Займемся преобразованием интегралов  $J_\nu$  и  $J_\omega$ . Энергия электрона равна

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_T^2 P^2}{2m} = \frac{mv_T^2}{2} P^2 = E_T P^2,$$

где  $E_T = mv_T^2/2$  – тепловая энергия электронов.

Аналогично,

$$E_{\mathbf{k} \mp \mathbf{q}} = \frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k} \mp \mathbf{q})^2 = E_T \left( \mathbf{P} \mp \frac{\mathbf{q}}{k_T} \right)^2 = E_T (\mathbf{P} \mp \mathbf{Q})^2,$$

где  $\mathbf{Q} = \mathbf{q}/k_T = \hbar \mathbf{q}/mv_T$  – безразмерное волновое число.

Разность этих величин равна:

$$E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = E_T (2P_x Q - Q^2) = Q m v_T \left( P_x - \frac{Q}{2} \right),$$

$$E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} = -E_T (2P_x Q + Q^2) = -Q m v_T \left( P_x + \frac{Q}{2} \right).$$

Найдем сумму этих равенств:

$$2E_{\mathbf{k}} - (E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) = -2Q^2 E_T = -Q^2 m v_T^2.$$

Значит,

$$J_\nu = \frac{1}{2\pi m v_T^2} \int \frac{f_F(P) P_{\perp}^2 d^3 P}{P_x^2 - (Q/2)^2}.$$

Далее, получаем:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu) &= Qmv_T^2(P_x - \frac{Q}{2}) - \hbar(\omega + i\nu) = \\ &= Qmv_T^2\left[P_x - \frac{Q}{2} - \frac{\hbar(\omega + i\nu)}{Qmv_T^2}\right] = Qmv_T^2\left[P_x - \frac{Q}{2} - \frac{z}{Q}\right], \end{aligned}$$

где

$$z = \frac{\omega + i\nu}{k_T v_T} = x + iy, \quad x = \frac{\omega}{k_T v_T}, \quad y = \frac{\nu}{k_T v_T}.$$

Точно так же

$$E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \hbar(\omega + i\nu) = Qmv_T^2\left[P_x + \frac{Q}{2} - \frac{z}{Q}\right].$$

Значит,

$$J_\omega = \frac{1}{2\pi m v_T^2} \int \frac{f_F(P) P_\perp^2 d^3 P}{(P_x - z/Q)^2 - (Q/2)^2}.$$

В интегралах  $J_\nu$  и  $J_\omega$  вычислим внутренний двойной интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_F(P) P_\perp^2 dP_x dP_y &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho^3 d\rho}{1 + e^{\rho^2 + \tau^2 - \alpha}} = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha - \rho^2 - \tau^2} \rho^3 d\rho}{1 + e^{\alpha - \rho^2 - \tau^2}} = 2\pi \int_0^{\infty} \rho \ln(1 + e^{\alpha - \rho^2 - \tau^2}) d\rho = 2\pi f_3(\tau, \alpha). \end{aligned}$$

Здесь

$$f_3(\tau, \alpha) = \int_0^{\infty} x^3 f_F(x, \tau, \alpha) dx, \quad f_F(x, \tau, \alpha) = \frac{1}{1 + e^{x^2 + \tau^2 - \alpha}}.$$



Согласно приведенным вычислениям для выражений (7) и (8) получаем:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 + \frac{1}{4f_2(\alpha)} \frac{\omega I_\omega + i\nu I_\nu}{\omega + i\nu} \right] \quad (9)$$

и

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{1}{4f_2(\alpha)} \frac{\omega I_\omega + i\nu I_\nu}{\omega + i\nu} \right] \quad (10)$$

Здесь  $\omega_p$  – плазменная (ленгмюровская) частота,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}},$$

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi} \int \frac{f_F(P) P_\perp^2 d^3 P}{P_x^2 - (Q/2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_3(\tau, \alpha) d\tau}{\tau^2 - (Q/2)^2},$$

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi} \int \frac{f_F(P) P_\perp^2 d^3 P}{(P_x - z/Q)^2 - (Q/2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_3(\tau, \alpha) d\tau}{(\tau - z/Q)^2 - (Q/2)^2},$$

Формулы (9) и (10) перепишем в безразмерных параметрах  $x, y$ :

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{iy}{x} \left[ 1 + \frac{x I_\omega + iy I_\nu}{4f_2(\alpha)(x + iy)} \right] \quad (11)$$

и

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{x_p^2}{x^2} \left[ 1 + \frac{x I_\omega + iy I_\nu}{4f_2(\alpha)(x + iy)} \right], \quad (12)$$

где  $x_p = \omega_p/k_T v_T$  – безразмерная плазменная частота.

Формулы (11) и (12) будут использованы ниже для проведения численных и графических расчетов.

Проверим выполнение одного из соотношений, называемого правилом  $f$ -сумм (см., например, [8], [18] и [16]) для

поперечной диэлектрической проницаемости (3.7). Это правило выражается формулой (4.200) из монографии [18]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) \omega d\omega = \pi \omega_p^2. \quad (13)$$

Как показано в [18], для доказательства соотношения (13) достаточно доказать выполнение предельного соотношения

$$\varepsilon_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + o\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Воспользуемся выражением (4) для поперечной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 Nm} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} \right]. \quad (15)$$

Из выражения (15) видно, что для доказательства (14) достаточно доказать, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 Nm} \int \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{\perp}^2 d\mathbf{k} \right] = 1.$$

Последнее соотношение совершенно очевидно, если заметить, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = 0.$$

Таким образом, правило  $f$ -сумм [18] для поперечной диэлектрической проницаемости квантовой столкновительной плазмы выполняется.

Рассмотрим частные случаи электрической проводимости.

Покажем, что

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma_{tr} = \sigma_0. \quad (16)$$

Возьмем формулу (5). Заметим, что третье слагаемое в (5) пропорционально  $\omega$ . Далее, легко видеть, что

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{1 + e^{P^2}}, \quad f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = \frac{1}{1 + e^{(P_x - q/k_T)^2 + P_{\perp}^2}}, \quad P_{\perp}^2 = P_y^2 + P_z^2.$$

При малых  $Q = q/k_T$  из последней формулы получаем:

$$f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = f_F(\mathbf{k}) + g(P)2P_x \frac{q}{k_T}, \quad g(P) = \frac{e^{P^2 - \alpha}}{(1 + e^{P^2 - \alpha})^2}.$$

Согласно (5) находим, что при  $\omega \approx 0$

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 - \frac{i\nu}{4\pi f_2(\alpha)(\omega + i\nu)} \int \frac{g(P)P_x P_{\perp}^2 d^3 P}{P_x - q/2k_T} \right].$$

Устремим  $q \rightarrow 0$  в этом выражении. Получаем, что

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 - \frac{i\nu}{4\pi f_2(\alpha)(\omega + i\nu)} \int g(P)P_{\perp}^2 d^3 P \right]. \quad (17)$$

Рассмотрим интеграл из (17):

$$\begin{aligned} \int g(P)P_{\perp}^2 d^3 P &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g(P)P_{\perp}^3 d^3 P = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau = 4\pi f_2(\alpha). \end{aligned}$$

На основании (17) теперь получаем:  $\sigma_{tr} = i\sigma_0\nu/(\omega + i\nu)$ . Отсюда видно, что при  $\omega \rightarrow 0$  и при малых  $q$  поперечная проводимость квантовой плазмы переходит в статическую проводимость классической плазмы.

Пусть теперь величина  $\omega$  мала, но не стремится к нулю. Преобразуем формулу (15) к следующему виду:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 - \frac{i\nu}{4\pi f_2(\alpha)(\omega + i\nu)} \int \frac{g(P)P_x P_\perp^2 d^3P}{P_x - q\hbar/2mv_T} - \frac{\omega}{4\pi f_2(\alpha)(\omega + i\nu)} \int \frac{g(P)P_x P_\perp^2 d^3P}{P_x - q\hbar/2mv_T - (\omega + i\nu)/v_T q} \right]. \quad (18)$$

С помощью равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(P)P_\perp^2 dP_y dP_z = \pi \ln(1 + e^{\alpha - P_x^2})$$

формула (18) упрощается:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 - \frac{iy}{4f_2(\alpha)z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau}{\tau - Q/2} - \frac{x}{4f_2(\alpha)z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{\tau - Q/2 - z/Q} \right]. \quad (19)$$

Возьмем выражение поперечной проводимости в классической плазме (см., например, [3]):

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{1}{4\pi f_2(\alpha)} \int \frac{g(P)P_\perp^2 d^3P}{1 - i\omega\tau + iqv_T\tau P_x}. \quad (20)$$

Формула (20) упрощается и принимает вид:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = -\frac{iy}{4f_2(\alpha)Q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau}{\tau - z/Q}. \quad (21)$$

Покажем, что формула (19) приводится при малых  $l$  к формуле (21) (это формула (3.7) из нашей работы [4] для поперечной электрической проводимости классической плазмы).

В формуле (19) преобразуем первый интеграл, разбивая его на два слагаемых. В результате получаем, что формула (19) преобразуется к виду:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ \frac{\omega}{\omega + i\nu} - \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \frac{1}{4f_2(\alpha)} \frac{Q}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau}{\tau - Q/2} - \frac{\omega}{\omega + i\nu} \frac{1}{4f_2(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2}) d\tau}{\tau - Q/2 - z/Q} \right]. \quad (22)$$

Из (22) видно, что первый интеграл пропорционален  $Q^2$ . Отбросим этот интеграл. В знаменателе второго интеграла из (22) пренебрегаем членом  $Q/2$ , ибо  $Q \ll |z|/Q$ . В результате для малых значений  $Q$  получаем:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \left[ 1 - \frac{1}{4f_2(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau \ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{\tau - z/Q} d\tau \right]. \quad (23)$$

Преобразуя интеграл из (23) на два, мы в точности получаем формулу (21):

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = -\frac{i\nu}{4Qf_2(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + e^{\alpha - \tau^2})}{\tau - z/Q} d\tau.$$

На рис. 1 – 6 представим сравнение модулей электрических проводимостей классической (кривые «1» и квантовой плазмы (кривые «2») в зависимости от безразмерной частоты колебаний электрического поля.

Из рис. 1 и рис. 2 видно, что модуль электрической проводимости классической плазмы  $|\sigma_{tr}^{classic}|$  является монотонно убывающей функцией частоты электромагнитного поля, в то время как  $|\sigma_{tr}^{quant}|$  квантовой плазмы имеет локальный максимум при малых значениях частоты колебаний электромагнитного поля и малых значениях частоты столкновений частиц плазмы и при любых значениях химического потенциала плазмы. Этот максимум исчезает при уменьшении величины волнового числа.

При малых значениях волнового числа и частоты столкновений плазмы графики модулей электрической проводимости классической и квантовой плазмы различаются только при малых значениях частоты колебаний электромагнитного поля. Различие между этими графиками тем больше, чем выше величина частоты столкновений частиц плазмы (рис. 3–5). При возрастании частоты колебаний электромагнитного поля эти графики практически совпадают. При уменьшении частоты столкновений графики модулей проводимости классической и квантовой плазмы начинают совпадать во всем диапазоне частот колебаний электромагнитного поля (рис. 4).

При малых значениях частоты колебаний электромагнитного поля и малых значениях частоты столкновений графики модулей проводимости классической и квантовой плазмы практически совпадают при малых значениях волнового числа. С увеличением волнового числа эти графики начинают различаться (рис. 6).

На рис. 7 и 8 представлены зависимости действительной и мнимой частей электрической проводимости квантовой плазмы от безразмерного волнового числа (рис. 7) и от безразмерной частоты колебаний электрического поля (рис. 8).

Интересно заметить (рис. 7), что действительная и мнимая части электрической проводимости квантовой плазмы имеют максимум, затем убывают до нуля с ростом волнового числа. Кроме того, мнимая часть электрической проводимости имеет сначала минимум, а затем и максимум (рис. 8).

На рис. 9 и 10 показаны зависимости действительной части (рис. 9) и мнимой части (рис. 10) электрической проводимости от безразмерной частоты колебаний электрического поля.

Из рис. 9 видно, что действительная часть электрической проводимости возрастает с уменьшением величины химического потенциала. С ростом частоты колебаний электромагнитного поля графики действительной части квантовой и классической плазмы практически совпадают (в частности, при  $-3 \leq \alpha \leq 2$ ). Для мнимой части ситуация аналогичная (рис. 10).

**Заключение.** В настоящей работе изучена электрическая проводимость и диэлектрическая проницаемость квантовой невырожденной столкновительной плазмы с произвольной степенью вырожденности электронного газа. Исследованы различные частные случаи. Проведено графическое сравнение квантовой проводимости из настоящей работы с классической проводимостью.

Рис. 1. Зависимость  $|\sigma_{tr}/\sigma_0|$  от величины  $x$ ;  $y = 0.01, q = 0.2, \alpha = -3$ .

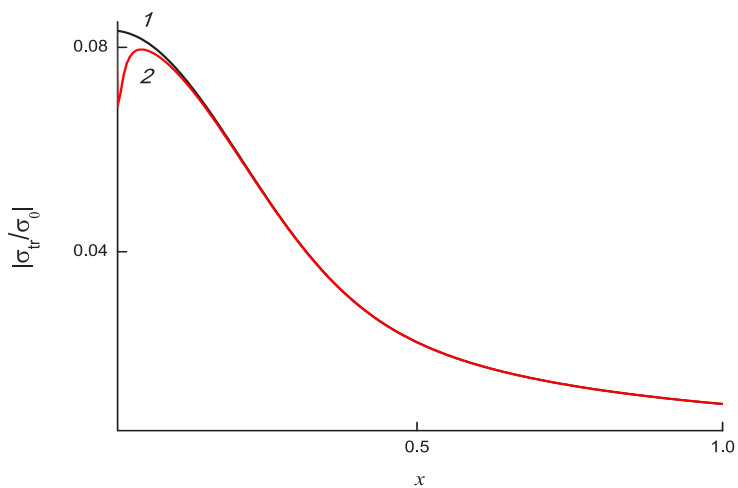


Рис. 2. Зависимость  $|\sigma_{tr}/\sigma_0|$  от величины  $x$ ;  $y = 0.001, q = 0.1, \alpha = 2$ .

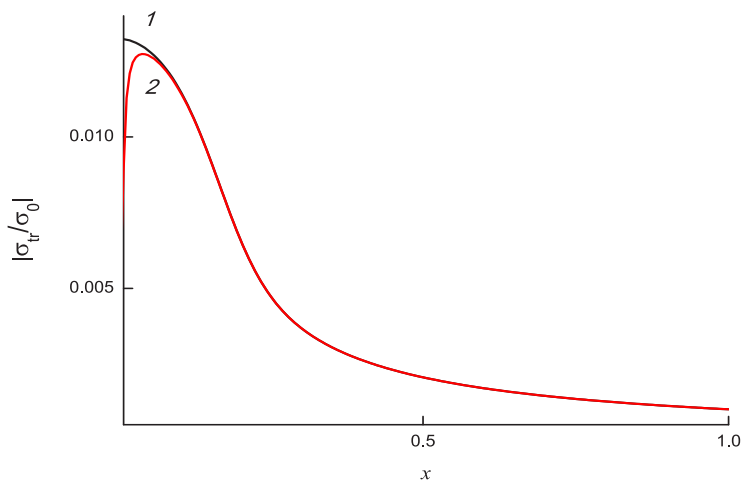




Рис. 3. Зависимость  $|\sigma_{tr}/\sigma_0|$  от величины  $x$ ;  $y = 0.1, q = 0.01, \alpha = -3$ .

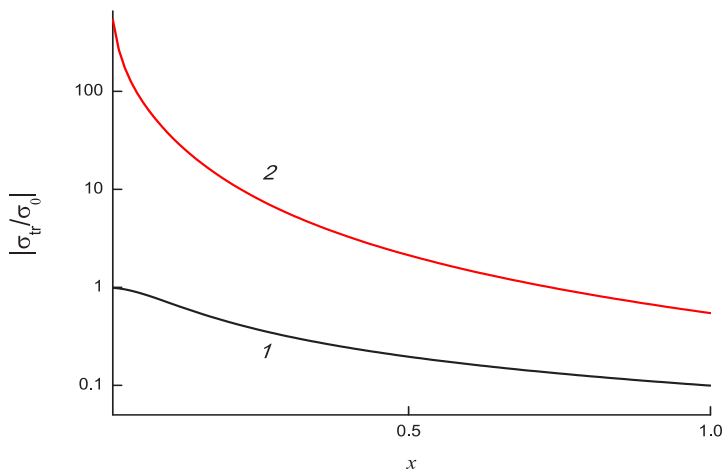


Рис. 4. Зависимость  $|\sigma_{tr}/\sigma_0|$  от величины  $x$ ;  
 $y = 0.0001, q = 0.01, \alpha = 0$ .

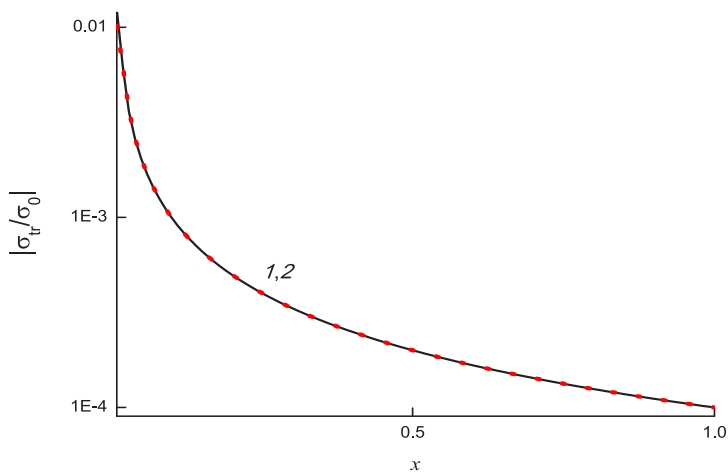


Рис. 5. Зависимость  $|\sigma_{tr}/\sigma_0|$  от величины  $x$ ;  $y = 0.001, q = 0.1, \alpha = 0$ .

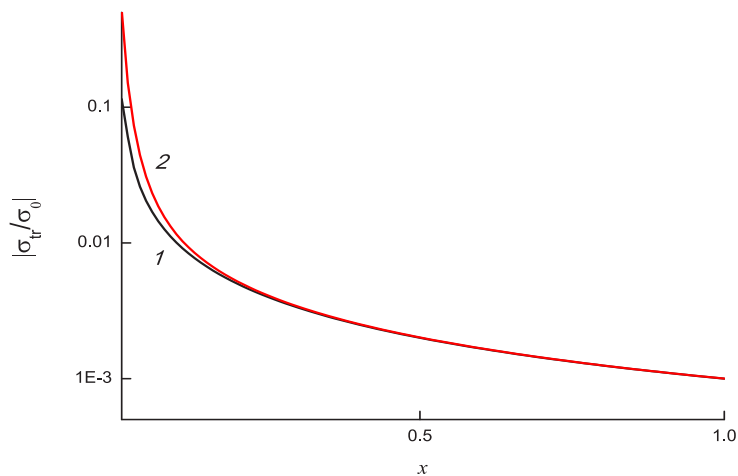


Рис. 6. Зависимость  $|\sigma_{tr}/\sigma_0|$  от величины  $q$ ;  $x = 0.1, y = 0.0001, 0 \leq q \leq 1, \alpha = 0$ .

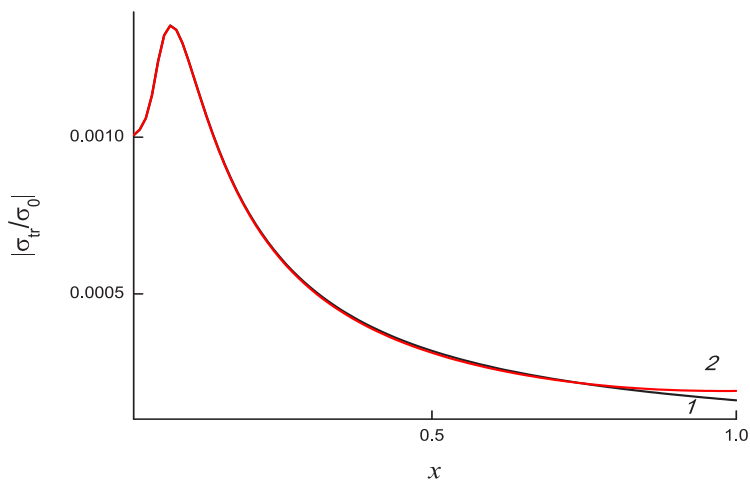


Рис. 7. Зависимость  $\text{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  (кривая "1") и  $\text{Im}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  (кривая "2") от величины  $q$ ;  $x = 0.1, y = 0.01, \alpha = 0$ .

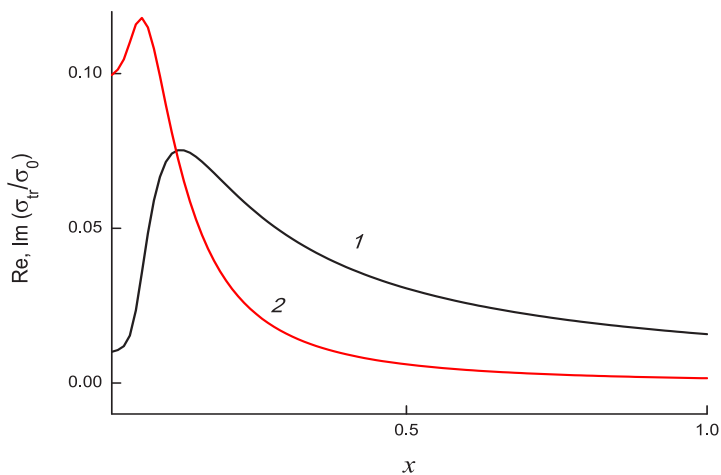


Рис. 8. Зависимость  $\text{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  (кривая "1") и  $\text{Im}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  (кривая "2") от величины  $x$ ;  $y = 0.01, q = 0.1, \alpha = 0$ .

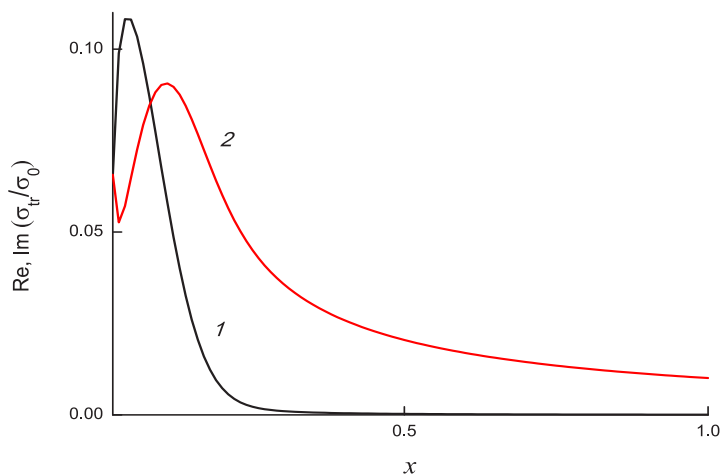


Рис. 9. Зависимость  $\text{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $x$ ;  $y = 0.1$ ,  $q = 0.1$ ; кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра  $\alpha$ :  $\alpha = 0, -3, 2$ .

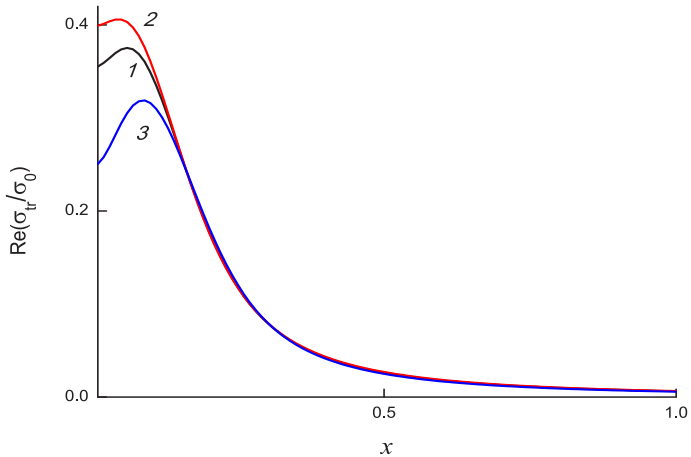
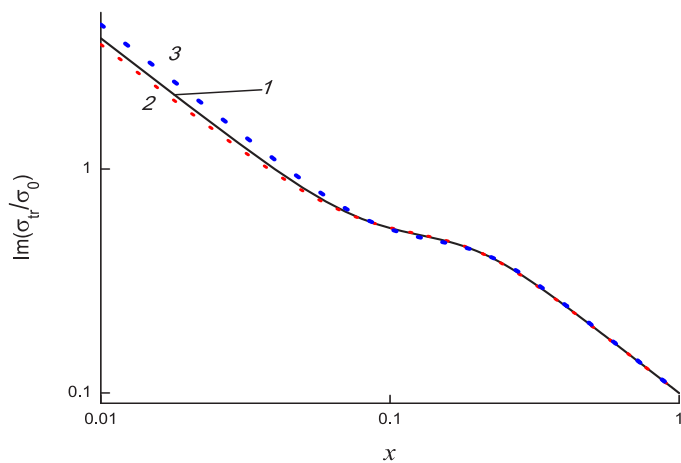


Рис. 10. Зависимость  $\text{Im}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $x$ ;  $y = 0.1$ ,  $q = 0.1$ ; кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра  $\alpha$ :  $\alpha = 0, -3, 2$ .



## Литература:

1. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Продольная проницаемость квантовой вырожденной столкновительной плазмы // Теор. и матем. физика. – 2011. – Т. 169. – №3. – С. 431–443.
2. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Поперечная электрическая проводимость квантовой столкновительной плазмы в подходе Мермина // Теор. и матем. физика. – 2013. – Т. 175. – № 1. – С. 134–144.
3. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме // Физика плазмы. – 2012. – Т. 38. – № 11. – С. 977–986.
4. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме // Электронный журнал. «Вестник МГОУ» [Сайт]. – М.:МГОУ, 2012. – №1. URL:[http://evestnik-mgou.ru/VIPUSKI/2012\\_1/stati/fizimat/latyshev.html](http://evestnik-mgou.ru/VIPUSKI/2012_1/stati/fizimat/latyshev.html).
5. *Шукла П.К., Элиассон Б.* Нелинейные аспекты квантовой физики плазмы // УФН. – 2010. – V. 180. – №1. – С. 55–82.
6. *Anderson D., Hall B., Lisak M., and Marklund M.* Statistical effects in the multistream model for quantum plasmas // Phys. Rev. E 65 (2002), 046417.
7. *Brodin G., Marklund M., Manfredi G.* Quantum Plasma Effects in the Classical Regime // Phys. Rev. Letters. 100, (2008). P. 175001-1 – 175001-4.
8. *Dressel M., Grüner G.* Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter. – Cambridge. Univ. Press, 2003. – 487 p.
9. *Klimontovich Y. and Silin V.P.* The Spectra of Systems of Interacting Particles // JETP (Journal Experimental Theoreticheskoi Fiziki). – 1952.–23. – P. 151–286.
10. *Kliwer K. L., Fuchs R.* Lindhard Dielectric Functions with a Finite Electron Lifetime // Phys. Rev. 1969. V. 181. – № 2. – P. 552–558.
11. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Longitudinal electric conductivity and dielectric permeability in quantum plasma with constant collision frequency in Mermin' approach // arXiv: 1212. 6260v1 [physics.plasma-ph] 26 Dec 2012. – 27 p.
12. *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Transverse electric conductivity in quantum collisional plasma in Mermin approach // arXiv:1109.6554v1 [math-ph] 29 Sep 2011.
13. *Lindhard J.* On the properties of a gas of charged particles // Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk–Fysiske Meddelelser. V. 28, №8 (1954), 1–57.
14. *Manfredi G.* How to model quantum plasmas // ArXiv: quant - ph/0505004. – 30 pp.
15. *Manfredi G. and Haas F.* Self-consistent fluid model for a quantum electron gas // Phys. Rev. B 64 (2001), 075316.
16. *Martin P.C.* Sum Rules, Kramers–Kronig Relations, and Transport Coefficients in Charged Systems // Phys. Rev. – 1967. – V. 161. – № 1. – P. 143–155.
17. *Mermin N.D.* Lindhard Dielectric Functions in the Relaxation–Time Approximation // Phys. Rev. B. 1970. V. 1. – № 5. – P. 2362–2363.
18. *Pines D., Nozières P.* The Theory of Quantum Liquids. VI: Normal Fermi Liquids. W.A. Benjamin, inc. – N.-York–Amsterdam, 1966.
19. *Wierling A.* Interpolation between local field corrections and the Drude model by a generalized Mermin approach // arXiv:0812.3835v1 [physics.plasm-ph] 19 Dec 2008.