

© *Латышев А.В., Юшканов А.А., 2012*

## ПОПЕРЕЧНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ В КВАНТОВОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ С ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ В ПОДХОДЕ МЕРМИНА

**Аннотация.** Выведены формулы для поперечной электрической проводимости и диэлектрической проницаемости в квантовой столкновительной плазме. Для вывода используется кинетическое уравнение в пространстве импульсов в релаксационном приближении с постоянной частотой столкновений. Показано, что когда постоянная Планка стремится к нулю, выведенная формула переходит в соответствующую формулу для классической плазмы. Показано также, что когда частота столкновений частиц плазмы стремится к нулю (т. е. плазма переходит в бесстолкновительную), формула для электрической проводимости переходит в хорошо известную формулу Линдхарда для бесстолкновительной плазмы. Отдельно рассмотрен случай полностью вырожденной квантовой плазмы. Приводится графическое сравнение с формулой, полученной Линдхардом.

**Ключевые слова:** столкновительная квантовая плазма, матрица плотности, уравнение Шредингера, коммутатор, диэлектрическая проницаемость, электрическая проводимость, функция Линдхарда, вырожденная плазма.

© *A. Latyshev, A. Yushkanov, 2012*

## TRANSVERSE ELECTRIC CONDUCTIVITY OF QUANTUM COLLISIONAL PLASMAS WITH CONSTANT COLLISION FREQUENCY IN MERMIN' APPROACH

**Abstract.** The article presents the formulae for transverse electric conductivity and dielectric permeability in quantum collisional plasma. The kinetic equation in momentum space in relaxation approaching with constant collision frequency for derivation of these formulae is used. It is shown, that when Planck's constant tends to zero the deduced formula passes in the corresponding formula for classical plasma. It is shown also, that when frequency of collisions of particles of plasma tends to zero (i.e. plasma passes in collisionless plasma), the formula for electric conductivity passes in the well-known Lindhard's formula.

**Key words:** collisional quantum plasma, density matrix, Schroedinger equation, commutator, dielectric permeability, electric conductivity, Lindhard' function, degenerate plasma.

В хорошо известной работе Мермина [12] на основе анализа неравновесной матрицы плотности в  $\tau$ -приближении было получено выражение для продольной диэлектрической проницаемости квантовой столкновительной плазмы.

Ранее в работе Линдхарда [8] были получены выражения для продольной и поперечной диэлектрической проницаемости квантовой бесстолкновительной плазмы. Затем Кливер и Фукс показали [7], что прямое обобщение формул Линдхарда на случай столкновительной плазмы (путем замены  $\omega \rightarrow \omega + i/\tau$ ) некорректно. Этот недостаток для продольной диэлектрической проницаемости был преодолен в работе Мермина [12]. В тоже самое время до настоящего времени не имеется корректного выражения для поперечной диэлектрической проницаемости для случая квантовой столкновительной плазмы. Цель настоящей работы — восполнить этот пробел.

Свойства электрической проводимости и диэлектрической проницаемости по формулам, выведенным Линдхардом [8], подробно изучались в монографии [4]. В работе [6] поперечная диэлектрическая проницаемость квантовой плазмы применялась в вопросах теории скин-эффекта. В настоящее время растет интерес к изучению различных свойств квантовой плазмы (см, например, [2;3;5;9;14;15]).

Особенно следует отметить работу Дж. Манфреди [10], посвященную исследованию электромагнитных свойств квантовой плазмы.

Диэлектрическая проницаемость плазмы определяется электрической проводимостью плазмы. Поэтому сначала мы рассмотрим поперечную электрическую проводимость квантовой столкновительной плазмы.

## 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

Пусть векторный потенциал электромагнитного поля является гармоническим, т. е. изменяется как  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ . Мы рассматриваем поперечную проводимость. Поэтому выполняется следующее соотношение  $\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ . Связь между векторным потенциалом и напряженностью электрического поля дается следующим выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = -\frac{ic}{\omega} \mathbf{E}(\mathbf{q}).$$

Равновесная матрица плотности имеет следующий вид

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\exp(\beta(H - \mu)) + 1}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\beta = 1/(k_B T)$ ,  $T$  – температура плазмы,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $\mu$  – химический потенциал плазмы,  $H$  – гамильтониан.

В линейном приближении гамильтониан имеет следующий вид

$$H = \frac{(\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(\mathbf{p}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{p}).$$

Следовательно, мы можем представить этот гамильтониан в виде суммы двух операторов  $H = H_0 + H_1$ , где

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad H_1 = -\frac{e}{2mc}(\mathbf{p}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{p}).$$

Возьмем кинетическое уравнение для матрицы плотности в  $\tau$ -приближении

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] + \frac{i\hbar}{\tau}(\tilde{\rho} - \rho). \quad (1.2)$$

Здесь  $\nu = 1/\tau$  – эффективная частота столкновений частиц плазмы,  $\tau$  – характерное время между двумя последовательными столкновениями,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $[H, \rho] = H\rho - \rho H$  – коммутатор.

В линейном приближении по внешнему полю мы ищем матрицу плотности в виде

$$\rho = \tilde{\rho}^{(0)} + \rho^{(1)}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\tilde{\rho}^{(1)}$  – поправка (возмущение) к равновесной матрице плотности, обусловленная наличием электромагнитного поля,  $\tilde{\rho}^{(0)}$  – равновесная матрица плотности, отвечающая «равновесному» оператору Гамильтона  $H_0$ .

Представим равновесную матрицу плотности  $\tilde{\rho}$  (см. (1.1)) в следующем виде

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(0)} + \tilde{\rho}^{(1)}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим коммутатор  $[H, \tilde{\rho}]$ . В линейном приближении этот коммутатор равен

$$[H, \tilde{\rho}] = [H_0, \tilde{\rho}^{(1)}] + [H_1, \tilde{\rho}^{(0)}] \quad (1.5)$$

и

$$[H, \tilde{\rho}] = 0. \quad (1.6)$$

Для коммутаторов из правой части равенства (1.5) мы находим

$$\langle \mathbf{k}_1 | [H_0, \tilde{\rho}^{(1)} | \mathbf{k}_2] \rangle = (E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}) \tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (1.7)$$

и

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1 | [H_1, \tilde{\rho}^{(0)} | \mathbf{k}_2] \rangle &= [f_F(\mathbf{k}_2) - f_F(\mathbf{k}_1)] \langle \mathbf{k}_1 | H_1 | \mathbf{k}_2 \rangle = \\ &= \frac{e}{2mc} [f_F(\mathbf{k}_2) - f_F(\mathbf{k}_1)] (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$f_F(\mathbf{k}) = \frac{1}{1 + \exp(\beta(E_{\mathbf{k}} - \mu))}, \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}, \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}.$$

Из соотношений (1.4)–(1.8) вытекает, что

$$\tilde{\rho}^{(1)} = -\frac{e\hbar}{2mc} \frac{f_F(\mathbf{k}_1) - f_F(\mathbf{k}_2)}{E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (1.9)$$

С помощью соотношений (1.3)–(1.5) мы линеаризуем кинетическое уравнение (1.2). Получаем следующее уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} = [H_0, \rho^{(1)}] + [H_1, \tilde{\rho}^{(0)}] + i\hbar(\tilde{\rho}^{(1)} - \rho^{(1)}). \quad (1.10)$$

Учитывая, что возмущение  $\rho^{(1)} \sim \exp(-i\omega t)$ , уравнение (1.10) принимает следующий вид

$$(\hbar\omega + i\hbar\nu)\rho_1 = [H_0, \rho_1] + [H_1, \tilde{\rho}_0] + i\hbar\nu\tilde{\rho}_1.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (\hbar\omega + i\hbar\nu)\langle \mathbf{k}_1 | \rho_1 | \mathbf{k}_2 \rangle &= \langle \mathbf{k}_1 | [H_0, \rho_1] | \mathbf{k}_2 \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{k}_1 | [H_1, \tilde{\rho}_0] | \mathbf{k}_2 \rangle + i\hbar\nu\langle \mathbf{k}_1 | \tilde{\rho}_0 | \mathbf{k}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1 | [H_0, \rho_1] | \mathbf{k}_2 \rangle &= (E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}) \langle \mathbf{k}_1 | \rho_1 | \mathbf{k}_2 \rangle = \\ &= (E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}) \rho_1(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Предыдущее равенство мы преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & (\hbar\omega + i\hbar\nu - E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2})\rho_1(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \\ & = \frac{e\hbar}{2mc} [f_F(\mathbf{k}_1) - f_F(\mathbf{k}_2)](\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + i\hbar\nu\tilde{\rho}_1(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Вернемся к уравнению (1.9). Преобразуем теперь это уравнение к виду

$$\begin{aligned} & (\hbar\omega + i\hbar\nu - E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2})\rho_1(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \\ & = \frac{e\hbar}{2mc} \frac{[f_F(\mathbf{k}_1) - f_F(\mathbf{k}_2)](E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2} - i\hbar\nu)}{E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \end{aligned}$$

из которого находим

$$\begin{aligned} & \rho_1(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \\ & = \frac{e\hbar}{2mc} \frac{[f_F(\mathbf{k}_1) - f_F(\mathbf{k}_2)](E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2} - i\hbar\nu)}{(E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2})(\hbar\omega + i\hbar\nu - E_{\mathbf{k}_1} + E_{\mathbf{k}_2})} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{A}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В уравнении (1.11) мы положим  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}_1 | \rho_1 | \mathbf{k}_2 \rangle = \langle \mathbf{k} | \rho_1 | \mathbf{k} - \mathbf{q} \rangle = \\ & = -\frac{e\hbar}{mc} \frac{[f_F(\mathbf{k}) - f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q})](E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k} - \mathbf{q}} - i\hbar\nu)}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k} - \mathbf{q}})(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k} - \mathbf{q}} - \hbar\omega - i\hbar\nu)} \mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

## 2. ПЛОТНОСТЬ ТОКА

Плотность тока  $\mathbf{j}(\mathbf{q})$  определяется как

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = e \int \frac{d\mathbf{k}}{8\pi^3 m} \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \rho + \rho \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle. \quad (2.1)$$

После подстановки (1.3) в интеграл из (2.1), мы имеем

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \rho + \rho \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle = \\ & = \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \left| \mathbf{p}\rho_1 + \rho_1\mathbf{p} - \frac{e}{c} (\mathbf{A}\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_0\mathbf{A}) \right| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} | \mathbf{p} \rho_1 + \rho_1 \mathbf{p} | \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle = 2\hbar \mathbf{k} \rho_0(\mathbf{q}),$$

$$\left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} | \mathbf{A} \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_0 \mathbf{A} | \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \left[ \tilde{\rho}_0(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}) + \tilde{\rho}_0(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}) \right].$$

Следовательно, выражение для плотности тока имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = & -\frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \int \frac{d\mathbf{k}}{8\pi^3} \tilde{\rho}_0(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \int \frac{d\mathbf{k}}{8\pi^3} \tilde{\rho}_0(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}) + \\ & + e\hbar \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3 m} \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} | \rho_1 | \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Первые два члена в этом выражении равны друг другу

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{8\pi^3} \tilde{\rho}_0(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{8\pi^3} \tilde{\rho}_0(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}) = \frac{N}{2},$$

где  $N$  – числовая плотность (концентрация) плазмы.

Следовательно, плотность тока равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = -\frac{e^2 N}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) + e\hbar \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3 m} \mathbf{k} \left\langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} | \rho_1 | \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right\rangle. \quad (2.2)$$

Первое слагаемое в (2.2) есть не что иное, как калибровочная плотность тока.

С помощью очевидной замены переменных выражение (2.2) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = -\frac{e^2 N}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) + e\hbar \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3 m} \mathbf{k} \langle \mathbf{k} | \rho_1 | \mathbf{k} - \mathbf{q} \rangle. \quad (2.3)$$

В соотношении (2.3) подынтегральное выражение дается равенством (1.12). Подставляя (1.12) в (2.3), получаем следующее выражение для плотности тока

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = & -\frac{e^2 N}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \\ & - \frac{e^2 \hbar^2}{m^2 c} \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} [\mathbf{k} \mathbf{A}(\mathbf{q})] \frac{[f_F(\mathbf{k}) - f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q})](E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k} - \mathbf{q}} - i\hbar\nu)}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k} - \mathbf{q}})(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k} - \mathbf{q}} - \hbar\omega - i\hbar\nu)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим далее

$$\Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{[f_F(\mathbf{k}) - f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q})](E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\hbar\nu)}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]}.$$

С учетом этого обозначения формулу (2.4) для плотности тока можно переписать короче:

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = -\frac{e^2 N}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \frac{e^2 \hbar^2}{m^2 c} \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} [\mathbf{k} \mathbf{A}(\mathbf{q})] \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}).$$

Направим ось  $x$  вдоль вектора  $\mathbf{q}$ , а ось  $y$  вдоль вектора  $\mathbf{A}$ . Тогда предыдущее векторное выражение (2.4) может быть переписано в виде трех скалярных

$$j_y(\mathbf{q}, \omega, \nu) = -\frac{e^2 N}{mc} A(\mathbf{q}) - \frac{e^2 \hbar^2 A(\mathbf{q})}{m^2 c} \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} k_y^2 \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q})$$

и

$$j_x(\mathbf{q}, \omega, \nu) = j_z(\mathbf{q}, \omega, \nu) = 0.$$

Очевидно, что

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} k_y^2 \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} k_z^2 \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} k_y^2 \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} (k_y^2 + k_z^2) \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} (\mathbf{k}^2 - k_x^2) \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Отсюда мы заключаем, что выражение для плотности тока можно представить в следующей инвариантной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = & -\frac{Ne^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \\ & - \frac{e^2 \hbar^2}{8\pi^3 m^2 c} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \int d\mathbf{k} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

или

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = -\frac{Ne^2}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{q}) -$$

$$-\frac{e^2\hbar^2}{8\pi^3m^2c}\mathbf{A}(\mathbf{q})\int d\mathbf{k}\left[\mathbf{k}^2-\left(\frac{\mathbf{kq}}{q}\right)^2\right]\frac{f_F(\mathbf{k})-f_F(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{E_{\mathbf{k}}-E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}-$$

$$-\frac{ie^2\hbar^3\omega}{8\pi^3m^2c}\mathbf{A}(\mathbf{q})\int d\mathbf{k}\left[\mathbf{k}^2-\left(\frac{\mathbf{kq}}{q}\right)^2\right]\frac{f_F(\mathbf{k})-f_F(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{(E_{\mathbf{k}}-E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}}-E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}-\hbar(\omega+i\nu)]}.$$

Первые два члена в предыдущем соотношении не зависят от частоты  $\omega$  и определяются диссипативными свойствами материала, определяемыми частотой столкновений  $\nu$ . Эти члены являются универсальными параметрами, определяющими диамагнетизм Ландау.

### 3. ПОПЕРЕЧНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Учитывая связь векторного потенциала с напряженностью электромагнитного поля, а также связь плотности тока с электрическим полем, на основании предыдущего соотношения (2.5) получаем следующее выражение инвариантного вида для поперечной электрической проводимости

$$\sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \frac{ie^2N}{m\omega} + \frac{ie^2\hbar^2}{8\pi^3m^2\omega} \int d\mathbf{k} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{kq}}{q} \right)^2 \right] \times$$

$$\times \frac{[f_F(\mathbf{k}) - f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q})(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\hbar\nu)]}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]}, \quad (3.1)$$

или, кратко,

$$\sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \frac{ie^2N}{m\omega} + \frac{ie^2\hbar^2}{8\pi^3m^2\omega} \int d\mathbf{k} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{kq}}{q} \right)^2 \right] \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}). \quad (3.1')$$

Заметим, что дробь из подынтегрального выражения из (3.1) может быть представлена двумя способами:

$$\frac{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\hbar\nu}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]} =$$

$$= \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} + \frac{\hbar\omega}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]}$$

или

$$\frac{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\hbar\nu}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]} =$$



$$= \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} + \frac{\omega}{\omega + i\nu} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)}$$

Следовательно, для поперечной электрической проводимости мы имеем два представления:

$$\begin{aligned} \sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) &= \frac{ie^2 N}{m\omega} + \frac{ie^2 \hbar^2}{8\pi^3 m^2 \omega} \int \frac{f_F(\mathbf{k}) - f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] d\mathbf{k} + \\ &+ \frac{ie^2 \hbar^3}{8\pi^3 m^2} \int \frac{f_F(\mathbf{k}) - f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) &= \frac{ie^2 N}{m\omega} - \frac{e^2 \hbar^2 \nu}{8\pi^3 m^2 \omega (\omega + i\nu)} \times \\ &\times \int \frac{f_F(\mathbf{k}) - f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] d\mathbf{k} + \\ &+ \frac{ie^2 \hbar^2}{8\pi^3 m^2 (\omega + i\nu)} \int \frac{f_F(\mathbf{k}) - f_F(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В интегралах из выражений (3.1)–(3.3) мы имеем

$$\left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] d\mathbf{k} = (k^2 - k_x^2) d^3 k.$$

Вместо вектора  $\mathbf{k}$  введем безразмерный вектор  $\mathbf{K}$  следующим равенством  $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{k}}{k_F}$ ,  $k_F = \frac{p_F}{\hbar}$ , где  $k_F$  – волновое число Ферми,  $p_F = mv_F$  – импульс электрона на поверхности Ферми,  $v_F$  – скорость электрона на поверхности Ферми.

Тогда

$$(k^2 - k_x^2) d^3 k = k_F^5 (K^2 - K_x^2) d^3 K.$$

Следовательно, с учетом последних равенств формулы (3.1)–(3.3) можно переписать в виде

$$\sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \frac{ie^2 N}{m\omega} + \frac{ie^2 \hbar^2}{8\pi^3 m^2 \omega} \int \Xi(\mathbf{K}, \mathbf{q}) [K^2 - K_x^2] d^3 K, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \frac{ie^2 N}{m\omega} + \frac{ie^2 \hbar^2}{8\pi^3 m^2 \omega} \int \frac{f_F(\mathbf{K}) - f_F(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} [K^2 - K_x^2] d^3 K +$$

$$+ \frac{ie^2\hbar^3}{8\pi^3m^2} \int \frac{f_F(\mathbf{K}) - f_F(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{(E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]} [K^2 - K_x^2] d^3K, \quad (3.5)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = & \frac{ie^2N}{m\omega} - \frac{e^2\hbar^2\nu}{8\pi^3m^2\omega(\omega + i\nu)} \times \\ & \times \int \frac{f_F(\mathbf{K}) - f_F(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} [K^2 - K_x^2] d^3K + \\ & + \frac{ie^2\hbar^2}{8\pi^3m^2(\omega + i\nu)} \int \frac{f_F(\mathbf{K}) - f_F(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} [K^2 - K_x^2] d^3K. \end{aligned} \quad (3.6)$$

С помощью найденных выражений для поперечной электрической проницаемости можно составить выражение для поперечной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu). \quad (3.7)$$

Проверим выполнение одного из соотношений, называемого правилом  $f$ -сумм (см., например, [4], [13] и [11]) для поперечной диэлектрической проницаемости (3.7). Это правило выражается формулой (4.200) из монографии [13]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) \omega d\omega = \pi\omega_p^2, \quad (3.8)$$

где  $\omega_p$  – плазменная (ленгмюровская) частота,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}.$$

Как показано в [13], для доказательства соотношения (3.8) достаточно доказать выполнение предельного соотношения

$$\varepsilon_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + o\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Воспользуемся выражением (3.1') для поперечной электрической проводимости и представим ее в виде

$$\sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \frac{ie^2 N}{m\omega} \left[ 1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 N m} \int d\mathbf{k} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right]. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.7), получаем следующее выражение для поперечной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 N m} \int d\mathbf{k} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right]. \quad (3.11)$$

Из выражения (3.11) видно, что для доказательства (3.9) достаточно доказать, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{\hbar^2}{8\pi^3 N m} \int d\mathbf{k} \left[ \mathbf{k}^2 - \left( \frac{\mathbf{k}\mathbf{q}}{q} \right)^2 \right] \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right] = 1.$$

Последнее соотношение совершенно очевидно, если заметить, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Xi(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = 0.$$

Таким образом, правило  $f$ -сумм [13] для поперечной диэлектрической проницаемости квантовой столкновительной плазмы выполняется.

#### 4. ВЫРОЖДЕННАЯ ПЛАЗМА

Далее мы будем рассматривать случай вырожденной плазмы. Тогда мы имеем

$$\left( \frac{m v_F}{\hbar} \right)^3 \equiv \left( \frac{p_F}{\hbar} \right)^3 \equiv k_F^3 = 3\pi^2 N.$$

Следовательно,

$$(k^2 - k_x^2) d^3 k = 3 \frac{\pi^2 N m^2 v_F^2}{\hbar^2} (K^2 - K_x^2) d^3 K.$$

Абсолютное распределение Ферми—Дирака  $f_F(\mathbf{k}) = 1/[1 + \exp(\beta E_{\mathbf{k}} - \alpha)]$ , где  $\alpha = \beta\mu$  — приведенный (безразмерный) химический потенциал плазмы, для вырожденной плазмы переходит в распределение

Ферми  $f_F(\mathbf{k}) = \Theta(\mathbf{k}) \equiv \Theta(E_F - E_{\mathbf{k}})$ . Здесь  $\Theta(x)$  – функция Хэви-сайда,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Теперь мы перепишем выражение (3.4) в виде

$$\sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \frac{ie^2 N}{m\omega} + \frac{3ie^2 N v_F^2}{8\pi\omega} \int \Xi(\mathbf{K}, \mathbf{q}) [K^2 - K_x^2] d^3 K, \quad (4.1)$$

где

$$\Xi(\mathbf{K}, \mathbf{q}) = \frac{[\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})](E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - i\hbar\nu)}{(E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]}.$$

Точно так же преобразуем формулы (3.5) и (3.6):

$$\begin{aligned} \sigma_{tr} = & \frac{ie^2 N}{m\omega} + \frac{3ie^2 N v_F^2}{8\pi\omega} \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} [K^2 - K_x^2] d^3 K + \\ & + \frac{3ie^2 N v_F^2 \hbar}{8\pi} \int \frac{[\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})][K^2 - K_x^2] d^3 K}{(E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]} \end{aligned} \quad (4.2)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{tr} = & \frac{ie^2 N}{m\omega} - \frac{3e^2 N v_F^2 \nu}{8\pi\omega(\omega + i\nu)} \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} (K^2 - K_x^2) d^3 K + \\ & + \frac{3ie^2 N v_F^2}{8\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} (K^2 - K_x^2) d^3 K, \end{aligned} \quad (4.3)$$

Вводя статическую проводимость  $\sigma_0 = e^2 N / m\nu$ , мы перепишем формулы (4.1)–(4.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = & \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 + \frac{3E_F}{4\pi} \times \right. \\ & \times \left. \int \frac{[\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})](E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - i\hbar\nu)}{(E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]} (K^2 - K_x^2) d^3 K \right], \quad (4.4) \\ \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = & \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 + \frac{3E_F}{4\pi} \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} (K^2 - K_x^2) d^3 K + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{3E_F \hbar \omega}{4\pi} \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{(E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}})[E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)]} (K^2 - K_x^2) d^3 K \right] \quad (4.5)$$

и

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 + \frac{3E_F i\nu}{4\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} (K^2 - K_x^2) d^3 K + \right. \\ \left. + \frac{3E_F \omega}{4\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} (K^2 - K_x^2) d^3 K \right]. \quad (4.6)$$

Здесь  $E_F = \frac{p_F^2}{2m}$  – энергия электрона на поверхности Ферми.

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Вычисление поперечной электрической проводимости можно провести по любой из формул (4.4)–(4.6). Вычислим интегралы, входящие в выражение (4.6). Первый интеграл есть частный случай второго. Поэтому сначала вычислим второй интеграл. Энергию  $E_{\mathbf{k}}$  выразим через энергию Ферми. Имеем:

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \mathbf{K}^2 = \frac{p_F^2}{2m} \mathbf{K}^2 = E_F \mathbf{K}^2 \equiv E_{\mathbf{K}}.$$

Точно так же получаем:

$$E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 (k_F \mathbf{K} - \mathbf{q})^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \left( \mathbf{K} - \frac{\mathbf{q}}{k_F} \right)^2.$$

Далее обозначим волновой вектор  $\mathbf{q}$  через  $\mathbf{k}$ , и введем безразмерный волновой вектор  $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}}{k_F}$ . Тогда

$$E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2 = E_F (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2.$$

Заметим, что

$$E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} = E_F \mathbf{K}^2 - E_F (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2 = E_F [2K_x q - q^2] = \\ = 2q E_F \left( K_x - \frac{q}{2} \right) = m v_F^2 q \left( K_x - \frac{q}{2} \right) = \hbar v_F k \left( K_x - \frac{q}{2} \right).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu) &= \hbar k v_F \left( K_x - \frac{q}{2} - \frac{\omega + i\nu}{v_F k} \right) = \\ &= \hbar v_F k \left( K_x - \frac{q}{2} - \frac{\omega + i\nu}{v_F k_F q} \right) = \hbar v_F k \left( K_x - \frac{q}{2} - \frac{z}{q} \right), \end{aligned}$$

где

$$z = x + iy = \frac{\omega + i\nu}{k_F v_F}, \quad q = \frac{k}{k_F}.$$

Таким образом, для абсолютного распределения Ферми–Дирака мы получаем

$$\Theta(\mathbf{K}) = \Theta(E_F - E_{\mathbf{K}}) = \Theta(E_F(1 - \mathbf{K}^2)) = \Theta(1 - \mathbf{K}^2),$$

$$\Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q}) = \Theta(E_F - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}) = \Theta[E_F - E_F(\mathbf{K} - \mathbf{q})^2] = \Theta[1 - (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2].$$

Теперь для второго интеграла из (4.6)

$$J = \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} - \hbar(\omega + i\nu)} (K^2 - K_x^2) d^3 K$$

получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{v_F k \hbar} \int \frac{\Theta(1 - \mathbf{K}^2) - \Theta[1 - (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2]}{K_x - z/q - q/2} (K^2 - K_x^2) d^3 K = \\ &= \frac{1}{v_F k \hbar} \int \left[ \frac{1}{K_x - z/q - q/2} - \frac{1}{K_x - z/q + q/2} \right] \times \\ &\quad \times \Theta(1 - \mathbf{K}^2) (K^2 - K_x^2) d^3 K = \\ &= \frac{1}{m v_F^2} \int \frac{\Theta(1 - \mathbf{K})^2 (K^2 - K_x^2) d^3 K}{(K_x - z/q)^2 - q^2/4} d^3 K = \frac{\pi}{2 m v_F^2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - t^2)^2 dt}{(t - z/q)^2 - q^2/4}. \end{aligned}$$

Аналогично, первый интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} J_0 &= \int \frac{\Theta(\mathbf{K}) - \Theta(\mathbf{K} - \mathbf{q})}{E_{\mathbf{K}} - E_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}} (K^2 - K_x^2) d^3 K = \\ &= \frac{\pi}{2 m v_F^2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - t^2)^2 dt}{t^2 - q^2/4} = \frac{\pi}{m v_F^2} \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^2 dt}{t^2 - q^2/4}. \end{aligned}$$

Теперь представим формулу (4.6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = & \frac{iy}{x} - \frac{3y^2}{8x^2(1+iy/x)} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^2 - q^2/4} + \\ & + \frac{3iy}{16(x+iy)} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^2 dt}{(t-z/q)^2 - q^2/4}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для сравнения представим формулу Линдхарда [8] в наших обозначениях следующим образом

$$\frac{\sigma_{tr}^{Lin}}{\sigma_0} = \frac{iy}{x} + \frac{3iy}{16x} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^2 dt}{(t-z/q)^2 - q^2/4}. \quad (5.2)$$

Из соотношений (5.1) и (5.2) видно, что мнимые части поперечных электрических проводимостей из настоящей работы и из работы Линдхарда при  $y \rightarrow 0$  совпадают:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \text{Im } \sigma_{tr}(\mathbf{q}, \omega, \nu) = \text{Im } \sigma_{tr}^{Lin}(\mathbf{q}, \omega, \nu).$$

Интегралы, входящие в (5.1), легко вычисляются

$$\begin{aligned} T_0(q) = & \int_0^1 \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^2 - q^2/4} = -\frac{5}{3} + \frac{q^2}{4} + \frac{(q^2-4)^2}{16q} \ln \frac{2-q}{2+q} = \\ = & -\frac{5}{3} + \frac{k^2}{k_F^2} + \frac{(k^2 - 4k_F^2)^2}{16kk_F^3} \ln \frac{2k_F - k}{2k_F + k}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} T_1(z, q) = & \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^2 dt}{(t-z/q)^2 - q^2/4} = -\frac{10}{3} + \frac{4z^2}{q^2} + \frac{q^2}{2} + \\ & + \frac{1}{q} \left[ \left(1 - \frac{z^2}{q^2}\right)^2 + \frac{q^4}{16} - \frac{q^2}{2} + \frac{3z^2}{2} \right] \ln \frac{(1-q/2)^2 - z^2/q^2}{(1+z/q)^2 - q^2/4} - \\ & - \frac{zq}{2} \left[ 1 + \frac{4}{q^2} \left(1 - \frac{z^2}{q^2}\right) \right] \ln \frac{(1-z/q)^2 - q^2/4}{(1+z/q)^2 - q^2/4}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Следовательно, поперечная электрическая проводимость квантовой плазмы вычисляется по формуле

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{iy}{x} - \frac{3y^2}{8(x^2 + iyx)}T_0(q) + \frac{3iy}{16(x + iy)}T_1(z, q), \quad (5.5)$$

где  $T_0(q)$  и  $T_1(z, q)$  даются соответственно формулами (5.3) и (5.4).

Представим формулу для поперечной электрической проводимости в явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{iy}{x} \left\{ 1 + \frac{3iy}{x} \left[ -\frac{5}{3} + \frac{q^2}{4} + \frac{(q^2 - 4)^2}{16q} \ln \frac{2 - q}{2 + q} \right] + \frac{3x}{16z} \left[ -\frac{10}{3} + \frac{4z^2}{q^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{q^2}{2} + \frac{1}{q} \left[ \left(1 - \frac{z^2}{q^2}\right)^2 + \frac{q^4}{16} - \frac{q^2}{2} + \frac{3z^2}{2} \right] \ln \frac{(1 - q/2)^2 - z^2/q^2}{(1 + z/q)^2 - q^2/4} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{zq}{2} \left[ 1 + \frac{4}{q^2} \left(1 - \frac{z^2}{q^2}\right) \right] \ln \frac{(1 - z/q)^2 - q^2/4}{(1 + z/q)^2 - q^2/4} \right] \right\}. \end{aligned}$$

## 6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Исследуем частные случаи электрической проводимости. Возьмем формулу (4.6) и преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} - \\ - \frac{3\nu^2}{8\pi\omega(\omega + i\nu)q} \int \frac{\Theta(1 - K^2) - \Theta(1 - (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2)}{K_x - q/2} (K^2 - K_x^2) d^3K + \\ + \frac{3i\nu}{8\pi(\omega + i\nu)q} \int \frac{\Theta(1 - K^2) - \Theta(1 - (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2)}{K_x - z/q - q/2} (K^2 - K_x^2) d^3K. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Подынтегральные выражения в этих интегралах содержат функцию

$$\varphi(\mathbf{q}) = \Theta(1 - K^2) - \Theta(1 - (\mathbf{K} - \mathbf{q})^2).$$

В линейном приближении мы получаем

$$\varphi(\mathbf{q}) = -2\delta(1 - K^2)K_xq = -\delta(1 - K)K_xq.$$



Теперь выражение (6.1) упрощается

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ 1 - \frac{3i\nu}{8\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{K_x \delta(1 - K)(K^2 - K_x^2) d^3 K}{K_x - q/2} - \frac{3\omega}{8\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{K_x \delta(1 - K)(K^2 - K_x^2) d^3 K}{K_x - z/q - q/2} \right]. \quad (6.2)$$

Заметим, что

$$\frac{3}{8\pi} \int \delta(1 - K)(K^2 - K_x^2) d^3 K = 1. \quad (6.3)$$

Следовательно, выражение (6.2) может быть преобразовано к следующему виду

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega} \left[ \frac{\omega}{\omega + i\nu} - \frac{3i\nu q}{16\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{\delta(1 - K)(K^2 - K_x^2) d^3 K}{K_x - q/2} - \frac{3\omega}{8\pi(\omega + i\nu)} \int \frac{K_x \delta(1 - K)(K^2 - K_x^2) d^3 K}{K_x - z/q - q/2} \right]. \quad (6.4)$$

Теперь из формулы (6.4) видно, что при  $q \rightarrow 0$

$$\sigma_{tr} = \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \sigma_0,$$

и при  $\omega = 0$  мы получаем в точности статическую проводимость:  $\sigma_{tr} = \sigma_0$ .

Покажем теперь, что при малых  $q$  выражение (6.4) приводит к известному выражению для проводимости вырожденной фермиевской плазмы. В самом деле, заметим, что при малых  $q$  первый интеграл из (6.4) пропорционален  $q^2$ . Отбросим этот интеграл. В знаменателе второго интеграла пренебрегаем членом  $q/2$ , ибо  $q/2 \ll |z|/q$ . В результате для малых  $q$  получаем:

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = \frac{i\nu}{\omega + i\nu} \left[ 1 - \frac{3}{8\pi} \int \frac{\delta(1 - K) K_x}{K_x - z/q} (K^2 - K_x^2) d^3 K \right]. \quad (6.5)$$

Пользуясь снова равенством (6.3) на основании (6.5) приходим к следующему выражению

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_0} = -\frac{3y}{8\pi q} \int \frac{\delta(1-K)(K^2 - K_x^2)}{K_x - q/2} d^3K,$$

которое приводит к известному выражению электрической проводимости в вырожденной фермиевской плазме

$$\sigma_{tr}^{\text{classic}} = -\frac{3iy\sigma_0}{4q} \int_{-1}^1 \frac{1 - \mu^2}{\mu - z} d\mu = \frac{3iy\sigma_0}{4q} \left[ \frac{2z}{q} + (z^2 - q^2) \ln \frac{z - q}{z + q} \right]. \quad (6.6)$$

На рис. 1–8 представим сравнение модулей действительной и мнимой частей трех электрических проводимостей. Одна из этих проводимостей введена в настоящей работе (это формула (5.1) и кривые 1 на рисунках), вторая — это проводимость Линдхарда (формула (5.2) и кривые 2), третья проводимость — это классическая проводимость (формула (6.6) и кривые 3). Представим на рис. 9 и 10 зависимость действительной и мнимой частей электрической проводимости, введенной в настоящей работе, от безразмерной частоты колебаний  $\omega$  при различных значениях безразмерного волнового числа  $q$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выведена формула для электрической проводимости в квантовой столкновительной плазме. Для этой цели используется кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме релаксационной модели в пространстве импульсов. Выделяется и исследуется случай вырожденной фермиевской плазмы. Проводится графическое сравнение проводимости из настоящей работы с проводимостью по Линдхарду и с классической проводимостью. В предыдущей нашей работе [1] изучалась электрическая проводимость квантовой столкновительной плазмы, выведенная с использованием кинетического уравнения Вигнера–Власова–Больцмана в координатном пространстве.

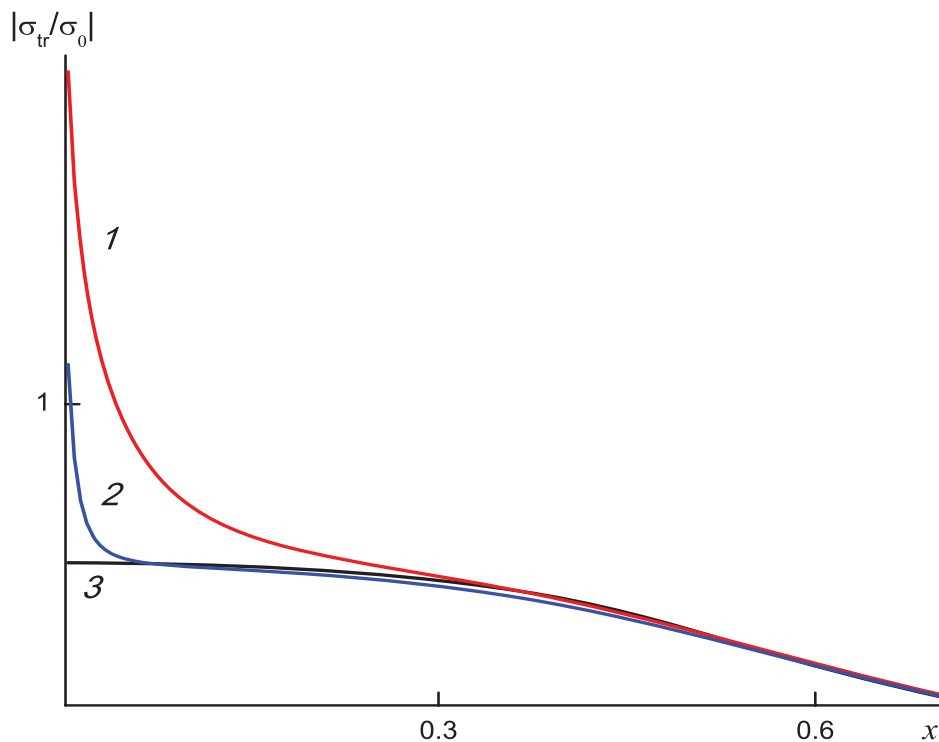


Рис. 1. Зависимость модуля  $|\sigma_{tr}/\sigma_0|$  от величины  $x$ ;  $y = 0.1, q = 0.5$ .

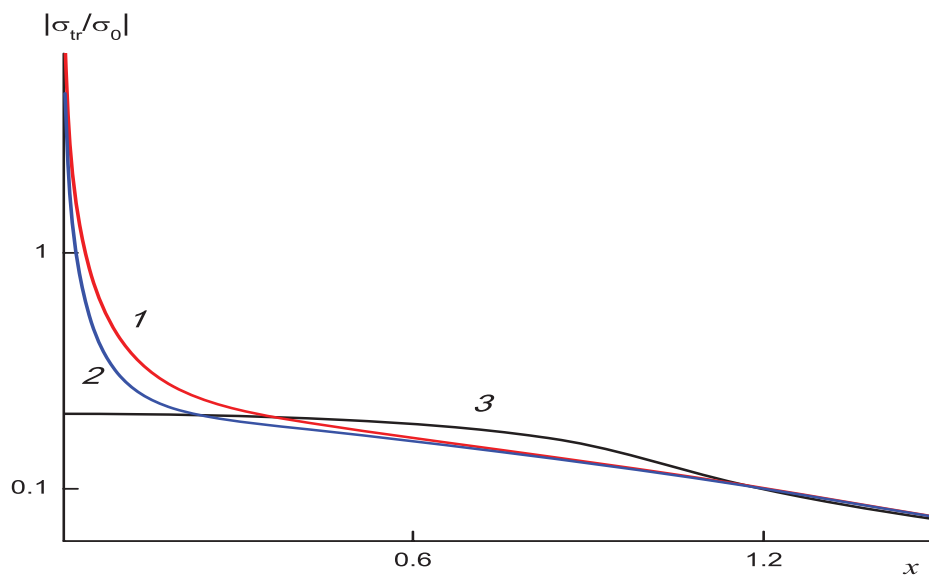


Рис. 2. Зависимость модуля  $|\sigma_{tr}/\sigma_0|$  от величины  $x$ ;  $y = 0.1, q = 1$ .

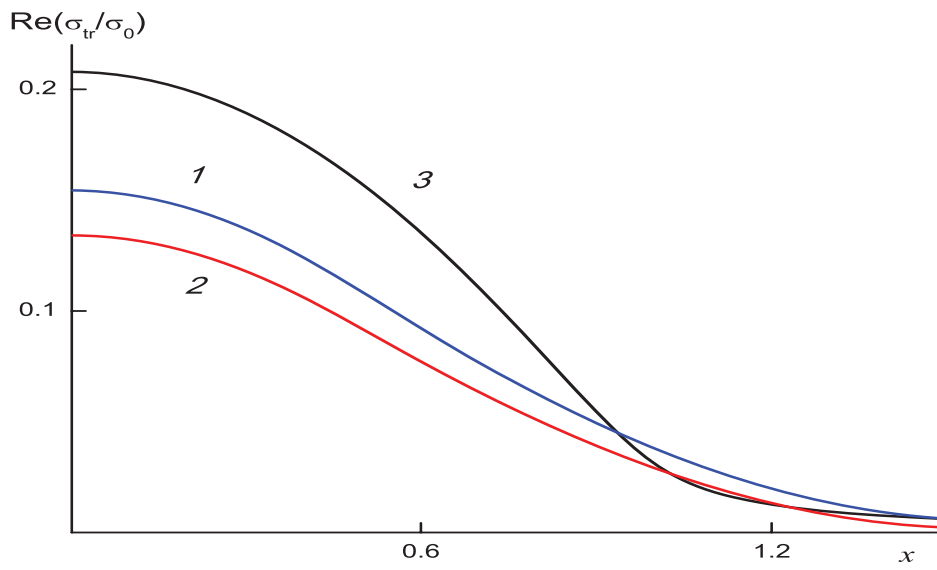


Рис. 3. Зависимость действительной части  $\text{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $x$ ;  
 $y = 0.1, q = 1$ .

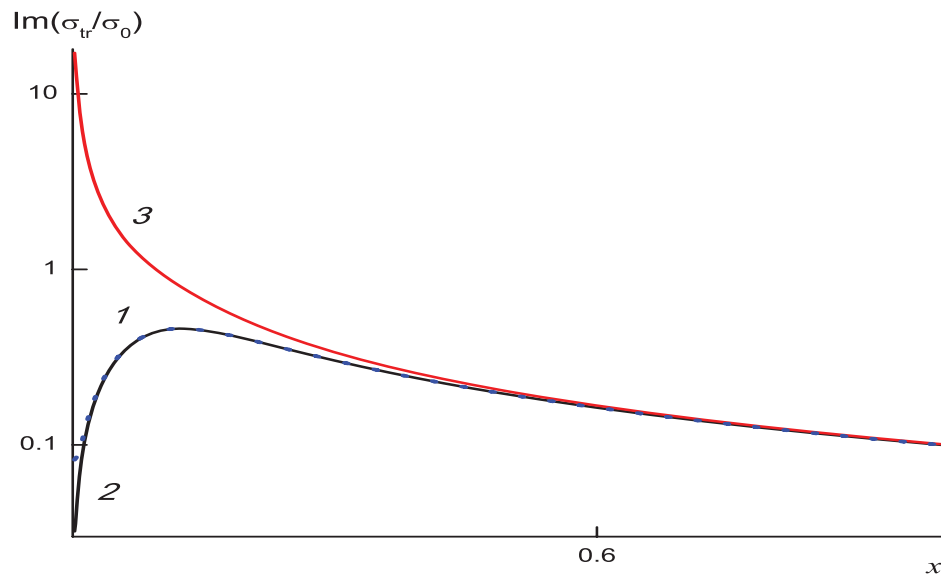


Рис. 4. Зависимость мнимой части  $\text{Im}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $x$ ;  $y = 0.1, q = 1$ .

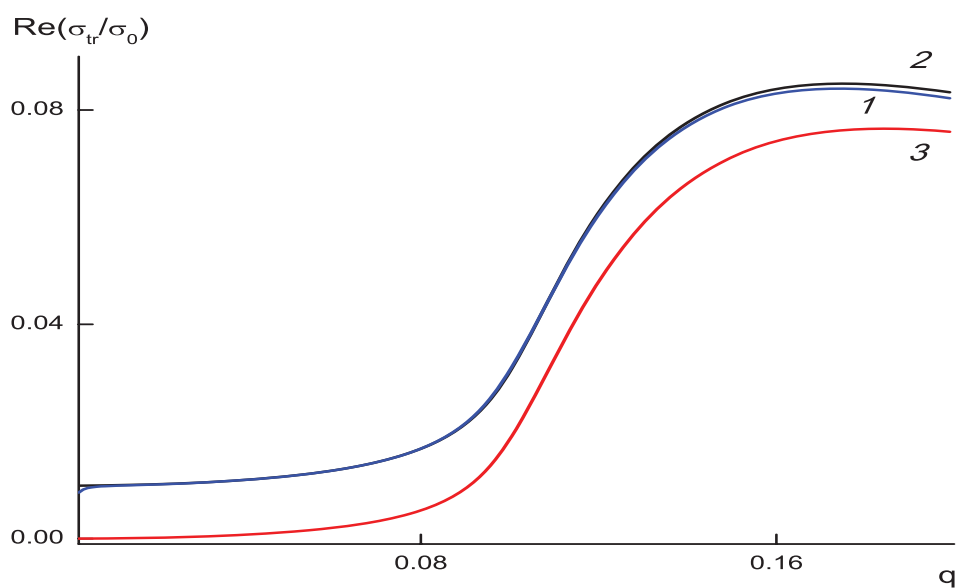


Рис. 5. Зависимость действительной части  $\text{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $q$ ;  
 $x = 0.1, y = 0.01, 0 \leq q \leq 0.2$ .

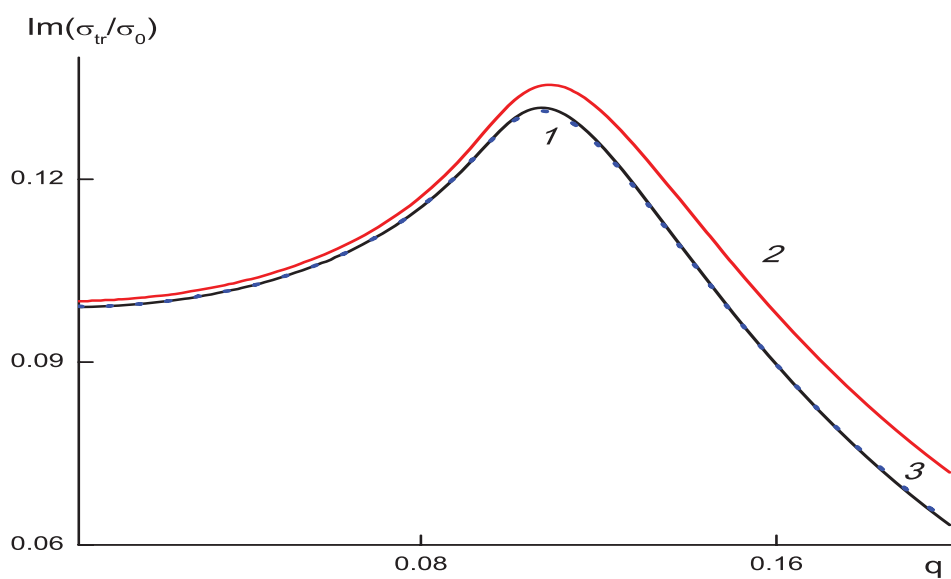


Рис. 6. Зависимость мнимой части  $\text{Im}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $q$ ;  
 $x = 0.1, y = 0.01, 0 \leq q \leq 0.2$ .

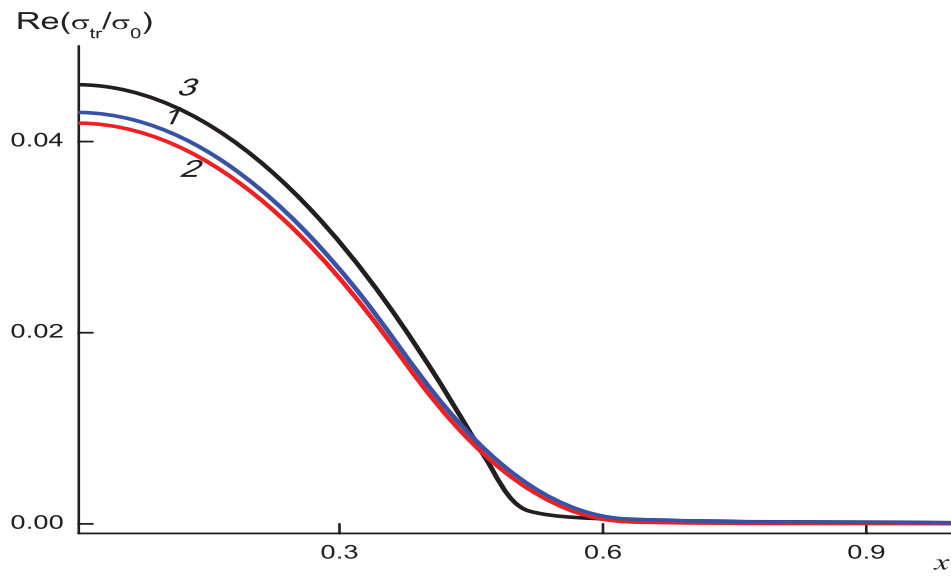


Рис. 7. Зависимость действительной части  $\text{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $x$ ;  
 $q = 0.5, y = 0.01$ .

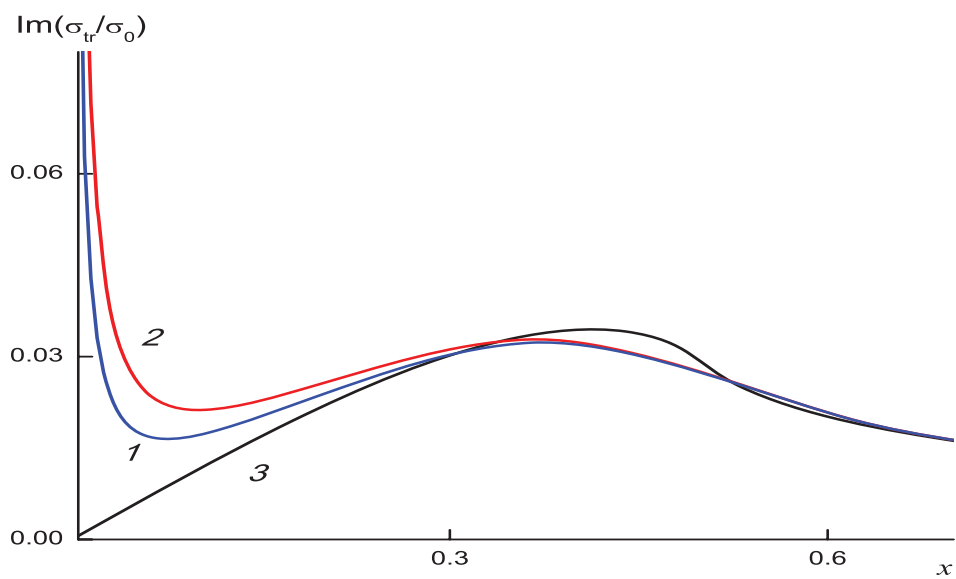


Рис. 8. Зависимость мнимой части  $\text{Im}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $x$ ;  $q = 0.5, y = 0.01$ .

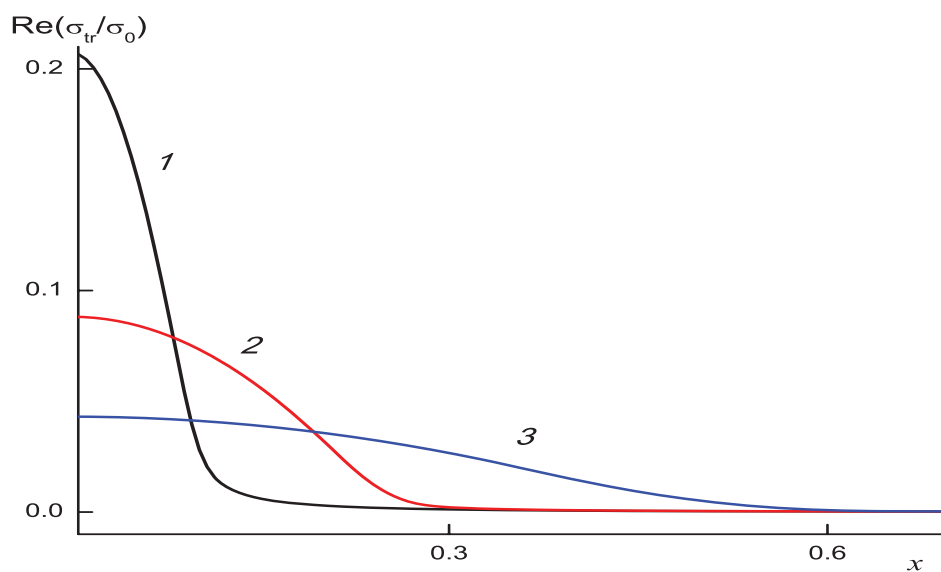


Рис. 9. Зависимость действительной части  $\text{Re}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $x$ ;  $y = 0.01$ , кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра  $q$ :  $q = 0.1, 0.25, 0.5$ .

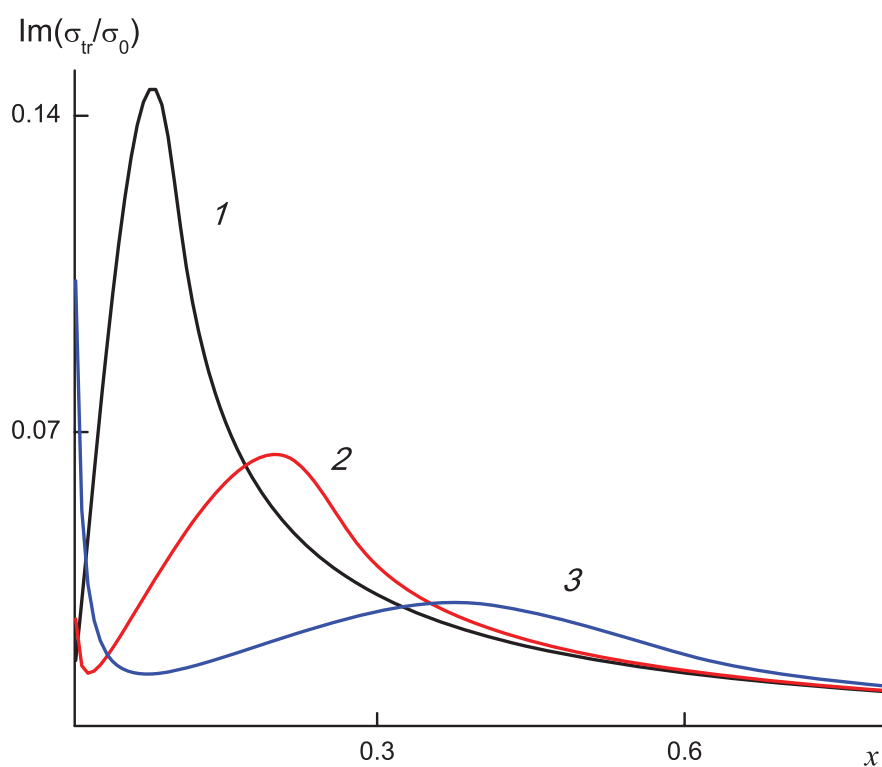


Рис. 10. Зависимость мнимой части  $\text{Im}(\sigma_{tr}/\sigma_0)$  от величины  $x$ ;  $y = 0.01$ , кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра  $q$ :  $q = 0.1, 0.25, 0.5$ .

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Латышев А.В.* Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме [Электронный ресурс] // Электронный журнал «Вестник Московского государственного областного университета» [Сайт]. – 2012 - № 1. – С.85-138. - URL: [http://evestnik-mgou.ru/vipuski/2012\\_1/stati/fizimat/latshev.html](http://evestnik-mgou.ru/vipuski/2012_1/stati/fizimat/latshev.html) (зарегистрировано в ФГУП НТЦ «Информрегистр» № 0421200150 \0012).
2. *Anderson D., Hall B., Lisak M. and Marklund M.* Statistical effects in the multis-tream model for quantum plasmas//Phys. Rev. E 65 (2002), 046417.
3. *Brodin G., Marklund M., Manfredi G.* Quantum Plasma Effects in the Classical Regime// Phys. Rev. Letters 100. (2008). P. 175001-1 - 175001-4.
4. *Dressel M., Grüner G.* Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter// Cambridge. Univ. Press, 2003. – 487 p.
5. *Eliasson B. and Shukla P.K.* Dispersion properties of electrostatic oscillations in quantum plasmas// arXiv:0911.4594v1 [physics.plasm-ph] 24 Nov. 2009. – 9 pp.
6. *Gelder van, A.P.* Quantum Corrections in the Theory of the Anomalous Skin Effect// Phys. Rev. 1969. Vol. 187. No. 3. – P. 833-842.
7. *Kliwer K.L., Fuchs R.* Lindhard Dielectric Functions with a Finite Electron Life-time// Phys. Rev. 1969. V. 181. No. 2. P. 552-558.
8. *Lindhard J.* On the properties of a gas of charged particles//Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-Fysiske Meddelelser. V. 28. No. 8 (1954), p.-57.
9. *Manfredi G. and Haas F.* Self-consistent fluid model for a quantum electron gas//Phys. Rev. B 64 (2001), 075316.
10. *Manfredi G.* How to model quantum plasmas//ArXiv: quant - ph/0505004. – 30 pp.
11. *Martin P.C.* Sum Rules, Kramers–Kronig Relations, and Transport Coefficients in Charged Systems//Phys. Rev. V. 161. No. 1. 1967. – P. 143-155.
12. *Mermin N. D.* Lindhard Dielectric Functions in the Relaxation–Time Approximation//Phys. Rev. B. 1970. V. 1. No. 5. – P. 2362-2363.
13. *Pains D. and Nozieres P.* The Theory of Quantum Liquids. V. I: Normal Fermi Liquids// W.A. Benjamin, inc. N.-York–Amsterdam, 1966. 355 p.
14. *Shukla P.K. and Eliasson B.* Nonlinear aspects of quantum plasma physics//Uspekhy Fiz. Nauk, 53 (1) 2010;[V. 180. No. 1. P. 55-82 (2010) (in Russian)].
15. *Wierling A.* Interpolation between local field corrections and the Drude model by a generalized Mermin approach//arXiv:0812.3835v1 [physics.plasm-ph] 19 Dec/ 2008.