

УДК 533.72:517.958

**Бедрикова Е.А., Латышев А.В.***(г. Москва)*

## ЗАДАЧА КРАМЕРСА ДЛЯ КВАНТОВОГО БОЗЕ-ГАЗА С ПОСТОЯННОЙ ЧАСТОТОЙ СТОЛКНОВЕНИЙ И С ЗЕРКАЛЬНО-ДИФFUЗНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

*Аннотация.* Рассматривается классическая проблема кинетической теории для квантового Бозе-газа – задача Крамерса с зеркально-диффузными граничными условиями. Задача Крамерса – это задача о нахождении функции распределения, массовой скорости и скорости скольжения разреженного газа вдоль плоской твердой поверхности в случае, когда газ движется вдоль некоторой оси, вдоль которой и вдали от стенки задан градиент массовой скорости газа. Получено решение полупространственной задачи Крамерса об изотермическом скольжении одноатомного газа с постоянной частотой столкновений молекул и с зеркально-диффузными граничными условиями. Применяется новый метод решения граничных задач кинетической теории. Метод позволяет получить решение с произвольной степенью точности. В основе метода лежит идея представления граничного условия на функцию распределения в виде источника в кинетическом уравнении. Решение получено в виде ряда Неймана.

*Ключевые слова:* квантовый Бозе-газ, задача Крамерса, диффузно-зеркальные граничные условия, ряды Неймана.

**E. Bedrikova, A. Latyshev***(Moscow)*

## THE KRAMERS PROBLEM FOR QUANTUM BOSE-GASES WITH CONSTANT COLLISION FREQUENCY AND SPECULAR-DIFFUSIVE BOUNDARY CONDITIONS

*Abstract.* The Kramers problem for quantum Bose-gases with specular-diffuse boundary conditions of the kinetic theory is considered. The Kramers problem is the problem of finding a distribution function of the mass velocity and the sliding velocity of a rarefied gas moving along a flat, solid surface in case when the gas moves along some axis and there is a given gradient of its mass velocity. The solution is received for the semi-spatial Kramers problem about the isothermal sliding of a monoatomic gas having constant collision frequency and specular-diffusive boundary conditions. The new method of solution of the boundary problems from the kinetic theory is developed. The method allows to receive the solution with any degree of accuracy. At the basis of the method lays the idea of representation of a boundary condition on the distribution function in the form of a source in the kinetic equation. The solution is received in the form of Neumann series.

*Key words:* quantum Bose-gas, Kramers problem, specular-diffusive boundary conditions, Neumann series.

## 1. Изотермическое скольжение газа вдоль плоской поверхности

Задача Крамерса является одной из важнейших задач кинетической теории газов. Эта задача имеет большое практическое значение. Её решение изложено в нескольких монографиях [3; 8].

Пусть газ занимает полупространство  $x > 0$  над твердой плоской неподвижной стенкой. Рассмотрим декартову систему координат с осью  $x$ , перпендикулярной стенке, и с плоскостью  $(y, z)$ , совпадающей со стенкой, так что начало координат лежит на стенке.

Газ движется вдоль оси  $y$  с массовой скоростью  $u_y(x)$ . Вдали от поверхности на расстоянии много больше средней длины свободного пробега частиц газа задан градиент массовой скорости газа  $g_v$ :

$$g_v = \left( \frac{du_y(x)}{dx} \right)_{x \rightarrow +\infty}, \quad (1.1)$$

т.е. профиль массовой скорости вдали от стенки можно представить в виде:

$$u_y(x) = u_{sl} + g_v x, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Наличие градиента массовой скорости вызывает скольжение газа вдоль поверхности, называемое изотермическим. Величина  $u_{sl}$  называется скоростью изотермического скольжения ( $sl \equiv sliding \equiv$  скольжение).

При малых градиентах  $g_v$  скорость изотермического скольжения пропорциональна величине градиента:

$$u_{sl} = K_v l g_v.$$

Здесь  $K_v$  – коэффициент изотермического скольжения,  $l$  – средняя длина свободного пробега частиц.

Величина  $K_v$  определяется кинетическими процессами вблизи поверхности. Для ее определения необходимо решить кинетическое уравнение в так называемом слое Кнудсена, т.е. в слое газа, примыкающего к поверхности, толщиной порядка длины свободного пробега  $l$ .

Вне слоя Кнудсена течение газа описывается уравнением Навье-Стокса. Для решения уравнения Навье-Стокса требуется построить граничные условия на стенке. Таким граничным значением может быть величина:  $u_g = u_{sl} + l g_v$ .

В качестве кинетического уравнения рассмотрим обобщение на квантовый случай БКВ-уравнения (Больцман, Крук, Веландер). Отметим, что в отечественной литературе это уравнение называют

также БГК–уравнением (Бхатнагар, Гросс, Крук). Это уравнение имеет следующий вид [1; 3; 8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla f) = \nu(f_{eq} - f). \quad (1.2)$$

Здесь  $f$  – функция распределения молекул по скоростям,  $\mathbf{v}$  – скорость молекул,  $\nu$  – эффективная частота столкновений молекул,  $f_{eq}$  – локально равновесная функция распределения,

$$f_{eq} = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2kT} \right].$$

Величины  $n$ ,  $T$ ,  $\mathbf{u}$  зависят, вообще говоря, от координаты  $\mathbf{r}$  и определяются как

$$n = \int f d^3 \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n_{eq}} \int \mathbf{v} f d^3 \mathbf{v}, \quad (1.4)$$

$$T = \frac{2}{3nk} \int \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f d^3 \mathbf{v}, \quad (1.5)$$

Числовая плотность (концентрация)  $n$  квантового газа и его температура  $T$  считаются постоянными.

Задача нахождения скорости изотермического скольжения  $u_{sl}$  называется задачей Крамерса [8]. Определение величины  $u_{sl}$  позволяет, как увидим ниже, полностью построить функцию распределения газовых молекул в данной задаче, найти профиль распределения в полупространстве массовой

скорости газа, а также найти значение массовой скорости газа на границе полупространства.

Настоящая работа посвящена изучению влияния квантовых эффектов на кинетические явления в разреженных Бозе-газах. Рассмотрение ведется на примере классической задачи об изотермическом скольжении газа (задача Крамерса) вдоль плоской поверхности [1; 3; 8]. Рассматриваются как диффузные граничные условия, так и зеркально-диффузные граничные условия Максвелла.

## 2. Постановка задачи Крамерса

Рассмотрим кинетическое уравнение для квантовых Бозе-газов с постоянной частотой столкновения.

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x_1, \mu) = 2U_y(x_1), \quad (2.1)$$

где массовая скорость газа вычисляется по формуле

$$U_y(x_1) = \frac{1}{4l_0^B(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - \exp(\alpha - C_x^2)) h(x_1, C_x) dC_x, \quad (2.2)$$

где

$$l_0^B(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - \exp(\alpha - C^2)) dC.$$

Введем функцию

$$\begin{aligned}
 K_B(\mu, \alpha) &= \frac{\ln(1 - \exp(\alpha - \mu^2))}{2l_0^B(\alpha)} = \\
 &= \frac{\ln(1 - \exp(\alpha - \mu^2))}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - \exp(\alpha - \tau^2)) d\tau}, \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

где  $\mu = C_x$ .

Эта функция обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu, \alpha) d\mu \equiv 1, \quad \forall \alpha \in (-\infty, +\infty).$$

Семейство функций

$$K_B(\mu, \alpha) = \frac{\ln(1 - \exp(\alpha - \mu^2))}{2l_0^B(\alpha)}$$

называется ядром кинетического уравнения.

Массовая скорость согласно (2.2) и (2.3) равна

$$U_y(x_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu', \alpha) h(x_1, \mu') d\mu'. \quad (2.4)$$

Таким образом, согласно (2.4) уравнение (2.1) представим в стандартном для теории переноса виде:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x_1, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu', \alpha) h(x_1, \mu') d\mu' \quad (2.5)$$

или в явном виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x_1, \mu) = \\ = \frac{1}{2l_0^B(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - \exp(\alpha - \mu'^2)) h(x_1, \mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рассматривая предельный случай уравнения (2.6) при  $\alpha \rightarrow -\infty$ , получаем уравнение

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) h(x_1, \mu') d\mu',$$

которое является БКВ-уравнением для одноатомных газов [1; 3; 8] с постоянной частотой столкновений молекул.

Задание градиента массовой скорости (1.1) означает, что вдали от стенки распределение массовой скорости в полупространстве имеет линейный рост

$$u_y(x) = u_{sl}(\alpha) + g_v x, \quad x \rightarrow +\infty.$$

где  $u_{sl}(\alpha)$  – неизвестная скорость скольжения.

Умножая это равенство на  $\sqrt{\beta}$  и учитывая связь размерного и безразмерного градиентов  $g_v = vG_v$ , для безразмерной массовой скорости, получаем

$$U_y(x_1) = U_{sl}(\alpha) + G_v x_1, \quad x_1 \rightarrow +\infty. \quad (2.7)$$

Зеркально-диффузное отражение Бозе-частиц от поверхности означает, что последние отражаются от стенки, имея бозеевское распределение, т.е.

$$\begin{aligned} f(x=0, \mathbf{v}) = qf_B(\mathbf{v}) + (1-q)f(x=0, -v_x, v_y, v_z), \\ v_x > 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $0 \leq q \leq 1$ ,  $q$  – коэффициент диффузности,  $f_B(v)$  – абсолютный бозеан.

В уравнении (2.8) параметр  $q$  (коэффициент диффузности) – часть молекул, рассеивающихся границей диффузно,  $1-q$  – часть молекул, рассеивающихся зеркально.

Из условия (2.8) получаем граничное условие на стенке на функцию  $h(x_1, \mu)$ :

$$h(0, \mu) = (1-q)h(0, -\mu), \quad \mu > 0. \quad (2.9)$$

Вторым граничным условием является граничное условие «вдали от стенки». Этим условием является соотношение (2.7). Преобразуем это условие на функцию  $h(x_1, \mu)$ . Условие (2.7) означает, что вдали от стенки массовая скорость переходит в свое асимптотическое распределение

$$U_y^{as}(x_1) = U_{sl}(\alpha) + G_v x_1.$$

Выражение для массовой скорости (2.2) означает, что вдали от стенки функция  $h(x_1, \mu)$  переходит в свое асимптотическое распределение

$$h_{as}(x_1, \mu) = 2U_{sl}(\alpha) + 2G_v(x_1 - \mu),$$

называемое распределением Чепмена-Энскога.

Таким образом, вторым граничным условием является условие:

$$h(x_1, \mu) = 2U_{sl}(\alpha) + 2G_v(x_1 - \mu), \quad x_1 \rightarrow +\infty. \quad (2.10)$$

Теперь задача Крамерса при условии полного диффузного отражения Бозе-частиц от стенки сформулирована полностью и состоит в решении уравнения (2.10) с граничными условиями (2.9) и

(2.10). При этом требуется определить безразмерную скорость скольжения  $U_{sl}(\alpha)$ , величина градиента  $G_v$  считается заданной.

### 3. Включение граничных условий в кинетическое уравнение

Продолжим функцию распределения на сопряженное полупространство симметричным образом:

$$f(t, x, v) = f(t, -x, -v_x, v_y, v_z). \quad (3.1)$$

Продолжение согласно (3.1) на полупространство  $x < 0$  позволяет включить граничные условия в уравнения задачи.

Такое продолжение функции распределения на полупространство  $x < 0$  позволяет фактически рассматривать две задачи, одна из которых определена в «положительном» полупространстве  $x > 0$ , вторая – в «отрицательном» полупространстве  $x < 0$ .

Сформулируем зеркально–диффузные граничные условия для функции распределения соответственно для «положительного» и для «отрицательного» полупространств:

$$f(t, +0, v) = qf_0(v) + (1 - q)f(t, +0, -v_x, v_y, v_z), \quad (3.2)$$

$$v_x > 0,$$

$$f(t, -0, v) = qf_0(v) + (1 - q)f(t, -0, -v_x, v_y, v_z), \quad (3.3)$$

$$v_x < 0,$$

где  $q$  – коэффициент диффузности,  $0 \leq q \leq 1$ .

В уравнениях (3.2) и (3.3) параметр  $q$  (коэффициент диффузности) – часть молекул, рассеивающихся границей диффузно,  $1-q$  – часть молекул, рассеивающихся зеркально, т. е. уходящие от стенки молекулы имеют максвелловское распределение по скоростям.

Проведя ряд преобразований, граничные условия перепишем в виде:

$$h_c(+0, \mu) = h_0^+(0, \mu) + (1-q)h_c(-0, \mu), \quad \mu > 0, \quad (3.4)$$

$$h_c(-0, \mu) = h_0^-(0, \mu) + (1-q)h_c(+0, \mu), \quad \mu < 0, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} h_0^\pm(\mu) &= -h_{as}^+(-0, \mu) + (1-q)h_{as}^\pm(-0, -\mu) = \\ &= -2qU_{sl}(q, \alpha) + (2-q)G_v|\mu|. \end{aligned}$$

Включим граничные условия (3.4) и (3.5) в кинетическое уравнение следующим образом:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h_c(x, \mu) = 2U_c(x) + \quad (3.6)$$

$$+ |\mu| [h_0^\pm(\mu) - qh_c(\pm 0, \mu)] \delta(x),$$

где  $U_c(x)$  – часть массовой скорости, отвечающая непрерывному спектру,

$$2U_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) h_c(x, t) dt. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) содержит два уравнения. В «положительном» полупространстве, т. е. при  $x > 0$  в правой части уравнения (3.6) следует взять верхний

знак «плюс», а в «нижнем» полупространстве, т. е. при  $x < 0$  в правой части того же уравнения следует взять знак «минус».

#### 4. Кинетическое уравнение во втором и четвертом квадрантах фазового пространства

Решая уравнение (3.6) при  $x > 0$ ,  $\mu < 0$ , считая заданным массовую скорость  $U(x)$ , получаем, удовлетворяя граничным условиям (3.5), следующее решение:

$$h_c^+(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \int_x^{+\infty} \exp\left(+\frac{t}{\mu}\right) 2U_c(t) dt. \quad (4.1)$$

Аналогично при  $x < 0$ ,  $\mu > 0$  находим:

$$h_c^-(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \int_x^{-\infty} \exp\left(+\frac{t}{\mu}\right) 2U_c(t) dt. \quad (4.2)$$

Теперь уравнения (3.6) и (3.7) можно переписать в виде:

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = \quad (4.3)$$

$$= 2U_c(x) + |\mu| [h_0^\pm(\mu) - qh_c^\pm(0, \mu)] \delta(x), \quad (4.4)$$

$$2U_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) h_c(x, t) dt.$$

В равенствах (4.3) граничные значения  $h_c(\pm 0, \mu)$  выражаются через составляющую массовой скорости, отвечающей непрерывному спектру:

$$h_c^\pm(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \int_x^{+\infty} \exp\left(\frac{t}{\mu}\right) 2U_c(t) dt = h_c(\pm 0, \mu).$$

Решение уравнений (4.4) и (4.3) ищем в виде интегралов Фурье:

$$2U_c(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E(k) dk, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \quad (4.5)$$

$$h_c(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \Phi(k) dk. \quad (4.6)$$

При этом функция распределения  $h_c^\pm(x, \mu)$  выражается через спектральную плотность  $E(k)$  массовой скорости следующим образом:

$$h_c^\pm(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} E(k)}{1 - ik\mu} dk.$$

Используя четность функции  $E(k)$ , далее получаем:

$$\begin{aligned} h_c^\pm(0, \mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k)}{1 - ik\mu} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k) dk}{1 + k^2 \mu^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(k) dk}{1 + k^2 \mu^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Теперь с помощью равенства (4.7) уравнение (4.3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = \\ & = 2U_c(x) + |\mu| \left[ h_0^\pm(\mu) - q \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(k) dk}{1+k^2 \mu^2} \right] \delta(x). \end{aligned} \quad (4.3')$$

## 5. Характеристическая система

Подставим интегралы Фурье (4.6) и (4.5), а также равенство (4.7) в уравнения (4.3) и (4.4). Получаем характеристическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi(k, \mu) &= \frac{E(k)}{1+ik\mu} + \\ &+ \frac{|\mu|}{1+ik\mu} \left[ -2qU_{sl}(q, \alpha) + 2(2-q)G_v |\mu| - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(k_1) dk_1}{1+k_1^2 \mu^2} \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$E(k) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) \Phi(x, t) dt. \quad (5.2)$$

Далее подставляя выражение для функции  $\Phi(k, \mu)$ , определенное равенством (5.1), в (5.2), получаем:

$$\begin{aligned} E(k)L(k) &= -2qU_{sl}(q, \alpha)T_1(k) + \\ &+ 2(2-q)G_v T_2(k) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty E(k_1) dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t| K_B(t, \alpha) dt}{(1+k_1^2 t^2)(1+ikt)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь

$$T_n(k) = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^n K_B(t, \alpha) dt}{1 + k^2 t^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

кроме того,

$$1 - L(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_B(t, \alpha) dt}{1 + ikt}.$$

Нетрудно видеть, что

$$L(k) = k^2 T_2(k).$$

Внутренний интеграл в (5.4) преобразуем и обозначим следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t| K_B(t, \alpha) dt}{(1 + k_1^2 t^2)(1 + ikt)} = 2 \int_0^{\infty} \frac{t K_B(t, \alpha) dt}{(1 + k_1^2 t^2)(1 + k^2 t^2)} = J(k, k_1).$$

Причём в общем виде:

$$J_n(k, k_1) = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^n K_B(t, \alpha) dt}{(1 + k_1^2 t^2)(1 + k^2 t^2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Заметим, что

$$J(k, 0) = T_1(k), \quad J(0, k_1) = T_1(k_1).$$

Перепишем теперь уравнение (5.4) с помощью предыдущего равенства в следующем виде:

$$E(k)L(k) = -2qU_{sl}(q, \alpha)T_1(k) + 2(2 - q)G_v T_2(k) - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} J(k, k_1)E(k_1)dk_1. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

## 6. Ряд Неймана

Считая градиент массовой скорости в уравнении (5.5) заданным, разложим решения характеристической системы (5.1) и (5.5) в ряд по степеням коэффициента диффузности  $q$ :

$$E(k) = G_v 2(2-q)[E_0(k) + qE_1(k) + q^2E_2(k) + \dots], \quad (6.1)$$

$$\Phi(k) = G_v 2(2-q)[\Phi_0(k) + q\Phi_1(k) + q^2\Phi_2(k) + \dots]. \quad (6.2)$$

Скорость скольжения  $U_{sl}(q, \alpha)$  при этом будем искать в виде

$$U_{sl}(q, \alpha) = G_v \frac{2-q}{q} [U_0 + qU_1 + q^2U_2 + \dots + q^nU_n + \dots]. \quad (6.3)$$

Подставим ряды (6.1)–(6.3) в уравнения (5.1) и (5.5). Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & (1 + ik\mu)[\Phi_0(k) + q\Phi_1(k) + q^2\Phi_2(k) + \dots] = \\ & = [E_0(k) + qE_1(k) + q^2E_2(k) + \dots] - \\ & - [U_0 + qU_1 + q^2U_2 + \dots + q^nU_n + \dots]|\mu| + \\ & + \mu^2 - |\mu| \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{[E_0(k_1) + qE_1(k_1) + q^2E_2(k_1) + \dots]}{1 + k_1^2\mu^2} dk_1, \\ & [E_0(k) + qE_1(k) + q^2E_2(k) + \dots]L(k) = \\ & = -[U_0 + qU_1 + q^2U_2 + \dots + q^nU_n + \dots]T_1(k) + \\ & + T_2(k) - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1)[E_0(k_1) + qE_1(k_1) + q^2E_2(k_1) + \dots] dk_1. \end{aligned}$$

Последние интегральные уравнения распадаются на эквивалентную бесконечную систему уравнений.

В нулевом приближении получаем следующую систему уравнений:

$$E_0(k)L(k) = T_2(k) - U_0 T_1(k), \quad (6.4)$$

$$(1 + ik\mu)\Phi_0(k, \mu) = E_0(k) - U_0|\mu| + \mu^2. \quad (6.5)$$

В первом приближении:

$$E_1(k)L(k) = -U_0 T_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} J(k, k_1) E_0(k_1) dk_1, \quad (6.6)$$

$$(1 + ik\mu)\Phi_1(k, \mu) = E_1(k) - U_1|\mu| - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E_0(k_1) dk_1}{1 + k_1^2 \mu^2}. \quad (6.7)$$

В  $n$ -м приближении получаем:

$$E_n(k)L(k) = -q^n U_n T_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} J(k, k_n) E_{n-1}(k_n) dk_n,$$

$$(1 + ik\mu)\Phi_n(k, \mu) = E_n(k) - U_n|\mu| - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E_{n-1}(k_n) dk_n}{1 + k_n^2 \mu^2},$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Учитывая формулы (6.4) и (6.5) для нулевого приближения и проводя ряд преобразований, находим:

$$h_c(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [E_0(k) - U_0|\mu| + \mu^2] \frac{e^{ikx} dk}{1 + ik\mu},$$

где

$$\Phi_0(k, \mu) = \frac{E_0(k) - U_0|\mu| + \mu^2}{1 + ik\mu}$$

– спектральная плотность функции распределения.

Здесь

$$E_0(k) = \frac{\varphi_0(k)}{T_2(k)}, \quad \varphi_0(k) = \frac{T_2(0)T_3(k) - T_1(0)T_4(k)}{T_1(0)}.$$

А нулевое приближение массовой скорости  $U_0$  равно:

$$U_0 = \frac{T_2(0)}{T_1(0)}.$$

Причем

$$U_0(-\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.8862, \quad U_0(0) = 0.7227.$$

Перейдем к первому приближению. В первом приближении, проведя соответствующие преобразования из уравнения (6.6), находим спектральную плотность функции распределения:

$$\Phi_1(k, \mu) = \frac{1}{1 + ik\mu} \left[ E_1(k) - U_1|\mu| - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_0(k_1)dk_1}{1 + k_1^2\mu^2} \right],$$

где

$$E_1(k_1) = \frac{\varphi_1(k_1)}{T_2(k_1)}, \quad \varphi_1(k_1) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{S(k_1, k_2)}{T_2(k_2)} \varphi_0(k_2) dk_2$$

и

$$S(k, k_1) = k_1^2 \left[ J_5(k, k_1) - \frac{T_3(k_1)T_3(k)}{T_1(0)} \right].$$

Первая поправка к массовой скорости имеет вид

$$U_1 = -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^\infty T(k_1)E_0(k_1)dk_1.$$

Нетрудно проверить, что

$$U_1(-\infty) \approx 0.1405, \quad U_1(0) = 0.1775.$$

Проводя аналогичные рассуждения, для  $n$ -го приближения получаем:

$$U_n = \\ = \frac{(-1)^n}{\pi^3} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{T(k_1)S(k_1, k_2) \dots S(k_{n-1}, k_n)}{T_1(0)T_2(k_1) \dots T_2(k_n)} \varphi_0(k_n) dk_1 dk_2 \dots dk_n,$$

$$E_n(k) = \\ = \frac{(-1)^n}{\pi^3 T_2(k)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{S(k, k_1)S(k_1, k_2) \dots S(k_{n-1}, k_n)}{T_2(k_1) \dots T_2(k_n)} \varphi_0(k_n) dk_1 dk_2 \dots dk_n,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\varphi_n(k) = \\ = \frac{(-1)^n}{\pi^3} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{S(k, k_1)S(k_1, k_2) \dots S(k_{n-1}, k_n)}{T_2(k_1) \dots T_2(k_n)} \varphi_0(k_n) dk_1 dk_2 \dots dk_n,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

## 7. Сравнение с точным решением. Скорость скольжения

Сравним нулевое, первое и второе приближения при  $q = 1$  с точным решением. Ограничимся случаем квантовых Бозе-газов, близких к классическим (т.е. при  $\alpha \rightarrow -\infty$ ), и случаем диффузного отражения молекул газа от поверхности.

Точное значение скорости скольжения в случае диффузного рассеяния для квантовых Бозе-газов с постоянной частотой столкновений таково:

$$U_{sl}(\alpha, q = 1) = V_1(\alpha)G_v.$$

Здесь

$$V_1(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \zeta(\tau, \alpha) d\tau,$$

где

$$\zeta(\tau, \alpha) = \theta(\tau, \alpha) - \pi,$$

$$\theta(\tau, \alpha) = \operatorname{arccctg} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \ln(1 - e^{\alpha - x^2})}{\tau \ln(1 - e^{\alpha - \tau^2})} \frac{dx}{x - \tau} \right].$$

Следовательно, точное значение безразмерной скорости скольжения в случае диффузного рассеяния для квантовых Бозе-газов, близких к классическим газам (т. е.  $\alpha \rightarrow -\infty$ ) таково:

$$U_{sl}(\alpha = -\infty, q = 1) = 1.0162 G_v.$$

Безразмерная скорость скольжения во втором приближении равна:

$$U_{sl}^{(2)}(\alpha, q = 1) = G_v \frac{2 - q}{q} [U_0(\alpha) + U_1(\alpha)q + U_2(\alpha)q^2].$$

Составим относительную ошибку приближения

$$O_n(\alpha) = \frac{V_1(\alpha) - U_{sl}^{(n)}(\alpha, q = 1)}{V_1(\alpha)},$$

где

$$U_{sl}^{(n)}(\alpha, q) = \sum_{k=0}^{k=n} U_k(\alpha) q^k.$$

Результаты численных расчетов приведем в виде таблиц. В таблицах 1–3 приведем значения коэффициентов  $U_0(\alpha), U_1(\alpha), U_2(\alpha)$  при различных значениях безразмерного химического потенциала  $\alpha$  и значения соответствующей относительной ошибки нулевого, первого и второго приближений безразмерной скорости скольжения.

**Таблица 1**

**Значение основных параметров в нулевом приближении безразмерной скорости скольжения**

Химпотенциал $\alpha$	Коэффициент $U_0(\alpha)$	Относительная ошибка в нулевом приближении, %
0	0.7227	18.01
-1	0.8580	13.33
-2	0.8769	12.96
-3	0.8829	12.85
-4	0.8850	12.81
-5	0.8858	12.80
-6	0.8861	12.79
-7	0.8862	12.79
-8	0.8862	12.79

**Таблица 2****Значение основных параметров в первом приближении безразмерной скорости скольжения**

Химпотенциал $\alpha$	Коэффициент $U_1(\alpha)$	Относительная ошибка в нулевом приближении, %
0	0.1775	-2.12
-1	0.1431	-1.12
-2	0.1413	-1.06
-3	0.1408	-1.05
-4	0.1406	-1.04
-5	0.1406	-1.04
-6	0.1405	-1.04
-7	0.1405	-1.04
-8	0.1405	-1.04

**Таблица 3****Значение основных параметров во втором приближении безразмерной скорости скольжения**

Химпотенциал $\alpha$	Коэффициент $U_2(\alpha)$	Относительная ошибка в нулевом приближении, %
0	-0.0214	0.30
-1	-0.0121	0.11
-2	-0.0117	0.10
-3	-0.0116	0.10
-4	-0.0116	0.10
-5	-0.0116	0.10

-6	-0.0116	0.10
-7	-0.0116	0.10
-8	-0.0116	0.10

Приведенное сравнение последовательных приближений с точным результатом свидетельствует о высокой эффективности предлагаемого метода.

## 8. Профиль скорости газа в полупространстве и ее значение у стенки

Массовую скорость, отвечающую непрерывному спектру, разложим по степеням коэффициента диффузности:

$$U_c(x) = U_0(x) + U_1(x)q + U_2(x)q^2 + \dots \quad (8.1)$$

Тогда профиль массовой скорости в полупространстве можно строить по формуле:

$$U(x) = U_{sl}(q, \alpha) + G_v x + U_c(x), \quad (8.2)$$

где  $U_c(x)$  определяется предыдущим равенством (8.1).

Коэффициенты ряда (8.1) вычислим согласно выведенным выше формулам:

$$U_c^{(n)}(x) = G_v \frac{2-q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk} E_n(k) dk, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Согласно (8.2) вычислим скорость газа непосредственно у стенки:

$$U(0) = U_{sl}(q, \alpha) + U_c^{(0)}(0) + qU_c^{(1)}(0) + q^2U_c^{(2)}(0) + \dots \quad (8.3)$$

В случае чисто диффузного отражения молекул от стенки ( $q = 1$ ) согласно (8.3), мы имеем

$$U(0) = U_{sl}(1, \alpha) + U_c^{(0)}(0) + U_c^{(1)}(0) + U_c^{(2)}(0) + \dots$$

Отсюда в нулевом приближении получаем:

$$U^{(0)} = U_{sl}(1, \alpha) + U_c^{(0)}(0).$$

Отсюда видно, что

$$U^{(0)} \Big|_{\alpha=-\infty} = U_{sl}(1, -\infty) + U_c^{(0)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} = 0.6747G_v.$$

В первом приближении получаем:

$$U^{(1)}(0) = U_{sl}(1, \alpha) + U_c^{(0)}(0) + U_c^{(1)}(0).$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} U^{(1)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} &= U_{sl}(1, -\infty) + U_c^{(0)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} + U_c^{(1)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} = \\ &= 0.7103G_v. \end{aligned}$$

Во втором приближении получаем:

$$U^{(2)}(0) = U_{sl}(1, \alpha) + U_c^{(0)}(0) + U_c^{(1)}(0) + U_c^{(2)}(0).$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} U^{(1)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} &= U_{sl}(1, -\infty) + U_c^{(0)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} + U_c^{(1)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} + \\ &+ U_c^{(2)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} = 0.7068G_v. \end{aligned}$$

Сравним эти результаты с точным значение скорости у стенки [18]:

$$U(0, \alpha) = \sqrt{\frac{l_2^B(\alpha)}{l_0^B(\alpha)}} G_v.$$

Из этой формулы вытекает, что

$$U(0)|_{\alpha=-\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} G_v = 0.7071 G_v.$$

Введем относительную ошибку

$$O_n = \frac{U(0) - U^{(n)}(0)}{U(0)} \cdot 100\%, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

В нулевом приближении относительная ошибка равна 4.6%, в первом приближении равна  $-0.45\%$ , во втором приближении равна:  $0.044\%$ .

## 9. Приведение формул к размерному виду

Для удобства расчетов мы работали с безразмерными величинами. Теперь перейдем к их размерному виду. Поскольку скорость скольжения является базовой величиной, зная ее, можно вычислить другие характеристики, будем рассматривать именно ее. Формулу (6.3) для безразмерной скорости скольжения в размерных величинах имеет вид:

$$U_{sl}(\alpha, q) = \frac{C(\alpha, q)}{v\sqrt{\beta l}} l g_v. \quad (9.1)$$

Здесь

$$C(q, \alpha) = \frac{2-q}{q} [U_0(\alpha) + U_1(\alpha)q + U_2(\alpha)q^2 \dots]. \quad (9.2)$$

Длину свободного пробега  $l$  в (9.1) выразим через вязкость  $\eta$  согласно Черчиньяни [3–7]:  $l = n\rho^{-1} \sqrt{\pi\beta}$ .

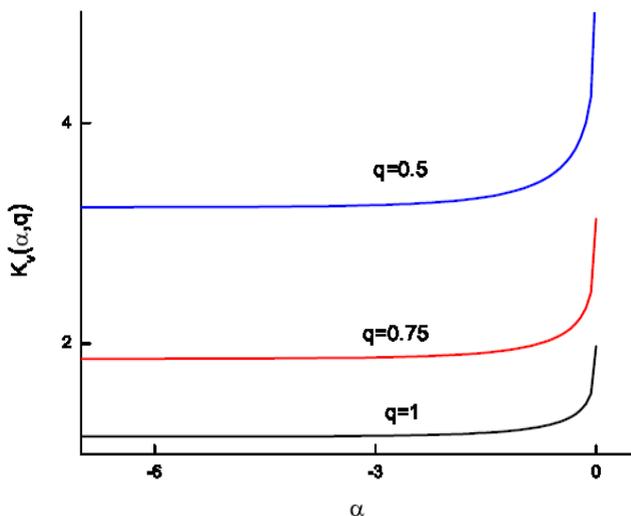
Искомая размерная скорость скольжения будет иметь вид:

$$U_{sl}(\alpha, q) = K_v^B(\alpha, q) l g_v,$$

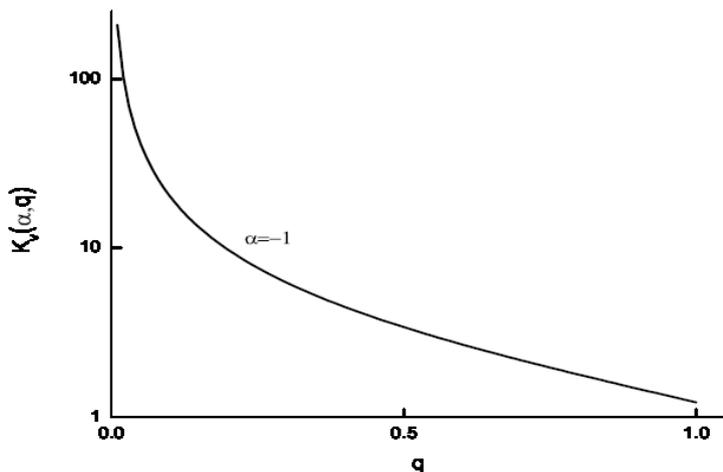
где

$$K_v^B(\alpha, q) = \frac{C(\alpha, q) l_0^B(\alpha)}{\sqrt{\pi} l_2^B(\alpha)}.$$

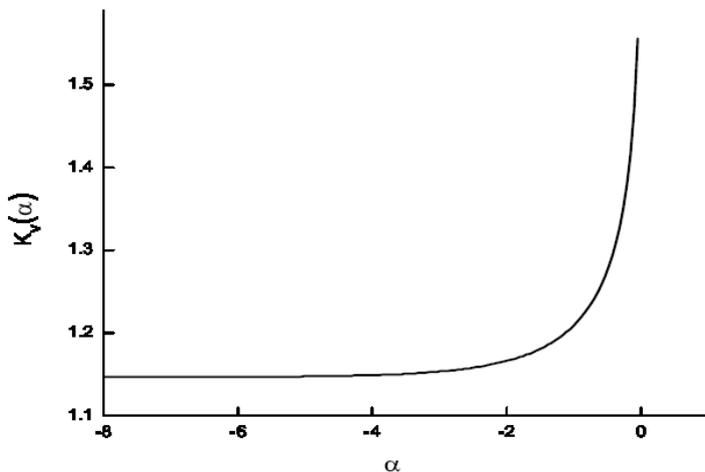
есть коэффициент изотермического скольжения.



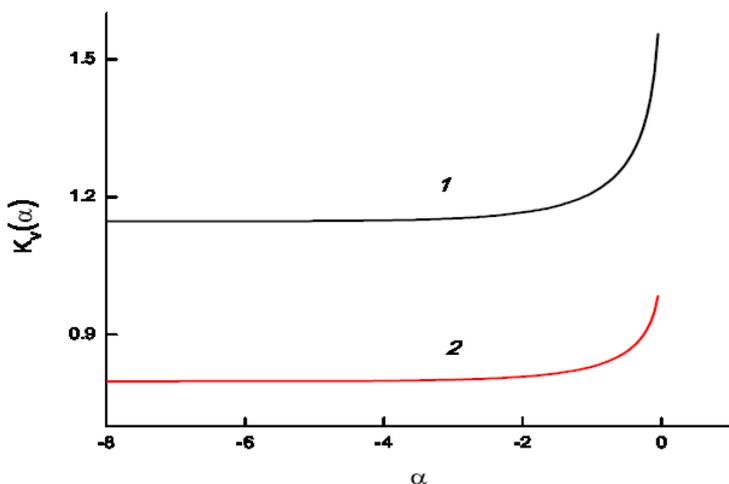
**Рис. 1.** Зависимость коэффициента изотермического скольжения от коэффициента диффузии



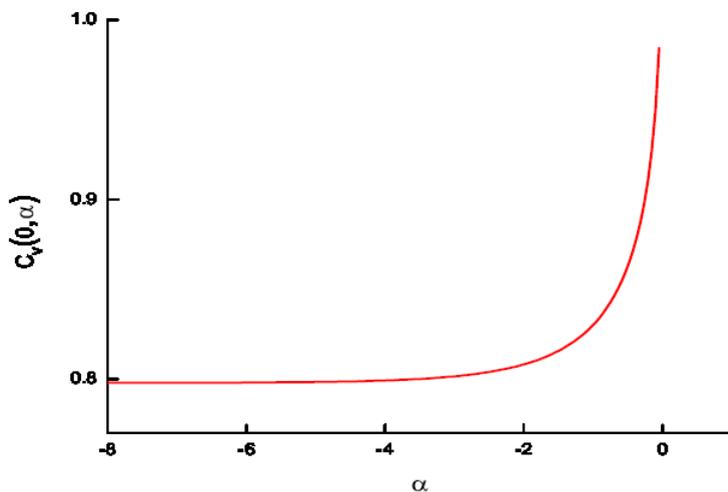
**Рис. 2.** Зависимость коэффициента изотермического скольжения от коэффициента диффузии



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента изотермического скольжения от приведенного химического потенциала



**Рис. 4.** Зависимость коэффициента изотермического скольжения  $K_v(0, \alpha)$  (кривая 1) и коэффициента скорости Бозе–газа  $K_v(0; \alpha)$  непосредственно у стенки (кривая 2) от приведенного химического потенциала



**Рис. 5.** Зависимость коэффициента скорости Бозе–газа непосредственно у стенки  $C(0, \alpha)$  от приведенного химического потенциала

В настоящей работе с помощью развитого недавно [19] нового метода решена полупространственная граничная задача кинетической теории – задача Крамерса об изотермическом скольжении квантового Бозе-газа с постоянной частотой столкновений молекул и с зеркально-диффузными граничными условиями. В основе метода лежит идея продолжить функцию распределения в сопряженное полупространство  $x < 0$  и включить в кинетическое уравнение граничное условие в виде члена типа источника на функцию распределения, отвечающую непрерывному спектру.

С помощью преобразования Фурье кинетическое уравнение сводим к характеристическому интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое решаем методом последовательных приближений. Для этого разлагаем в ряды по степеням коэффициента диффузности скорость скольжения газа, его функцию распределения и массовую скорость, отвечающие непрерывному спектру. Подставляя эти разложения в характеристическое уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях коэффициента диффузности, получаем счетную систему зацепленных уравнений, из которых находим все коэффициенты искомых разложений.

Мы находим так называемую скорость скольжения газа вдоль поверхности, функцию распределения и распределение массовой скорости в полупространстве.

Предлагаемый метод обладает высокой эффективностью. Так, сравнение с точным решением показывает, что в третьем приближении ошибка не превосходит 0.1%.

Изложенный в работе метод был успешно применен [9–17] в решении ряда таких сложных задач кинетической теории, которые не допускают аналитического решения.

## Литература:

1. Case K.M. Elementary solutions of the transport equations and their applications // *Ann. Phys.* – 1960. – V.9. – № 1. – P. 1–23.
2. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas–dynamics Boltzmann equation and their applications to the slip–flow problem // *Ann. Phys. (USA)*. – 1962. – V. 20. – № 2. – P. 219–233.
3. Cercignani C. *Mathematical Methods in Kinetic Theory*. – New York: Plenum Press, 1969.
4. Cercignani C. The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency // *Ann. Phys.* – 1966. – V. 40. – P. 469–481.
5. Cercignani C. The Kramers problem for a not completely diffusing wall // *J. Math. Phys. Appl.* – 1965. – V.10. – P. 568–586.
6. Cercignani C., Foresti P., Sernagiotto F. Dependence of the slip coefficient on the form of the collision frequency. – Part 2 // *Nuovo Cimento*. – 1968. – V. LV11. – B. – № 2. – P. 297–306.
7. Cercignani C., Lampis M. Kinetic model for gas–surface interaction // *Transport Theory and Statist. Physics*. – 1971. – V.1. – P. 101–109.
8. Ferziger J.H. and Kaper H.G. *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1972.
9. Gritsenko N.V., Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Plasma Waves Reflection from a Boundary with Specular Accomodative Conditions // *Comp. Maths. and Math. Phys.* – 2010. – V.1. 50. – № 8. – P. 1433–1446.
10. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Isothermal slip of a Fermi gas with specular–diffuse reflection from the boundary // *Russian Physics Journal*. – 2009. – V. 52. – Is. 12. – P. 1251.
11. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Skin effect with arbitrary specularity in Maxwellian Plasma // *J. of Math. Phys.* – 2010. – V. 51. – P. 113505-1–113505-10.
12. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smolukhowski problem for degenerate Bose gases // *Theor. Mathem. Phys.* Springer New York. – 2008. – V. 155. № 3. – P. 936–948.
13. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Smoluchowski problem for metals with mirror–diffusive boundary conditions // *Theor. and Mathem. Physics*. – 2009. – № 161(1). – P. 1403–1414.
14. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Solution of the Skin Effect Problem with Arbitrary Coefficient of Specular Reflection // *Comp. Mathem. and Mathem. Physics*. – 2009. – V. 49. – № 1. – P. 131–145.
15. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Structure of the Electric Field in the Skin – Effect Problem // *Physics of Solid State*. – 2009. – V. 51. – № 4. – P. 662–669.
16. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump in degenerate quantum gases in the presence of a Bose-Einstein condensate // *Theor. and Mathem. Phys.* – 2010. – V. 162(1). – P. 95–105.
17. Latyshev A.V., Yushkanov A.A. Temperature jump in degenerate quantum gases with the Bogoliubov excitation energy and in the presence of the Bose–Einstein condensate // *Theor. and Mathem. Physics*. – 2010. – V. 165(1). – P. 1359–1371.

18. Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для квантового ферми-газа // Теор. и матем. физика. – 2001. – Т. 129. – № 3. – С. 491–502.

19. Латышев А.В., Юшканов А.А. Новый метод решения граничных задач кинетической теории // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 2012. – Т. 52. – № 3. – С. 1–14.